TD : méthode d'Euler

L'objectif de cette activité est de découvrir une fonction f vérifiant une condition initiale : $f(x_0) = y_0$
et connaissant une relation entre la fonction f et sa dérivée f'.
Une telle relation est appelée une **équation différentielle**.

Méthode utilisant l'approximation affine:

- ✓ On choisit un pas h
- ✓ On construit le point $A_0(x_0 ; y_0)$ correspondant à la condition initiale
- ✓ On pose $x_1 = x_0 + h$, on écrit l'approximation affine de f au voisinage de x_1 :
  ……………………………………….
  on pose $\boldsymbol{y_1} = f(x_0 + h)$ et on construit le point $A_1(x_1 ; y_1)$.
  on construit le **segment** $[A_0A_1]$
- ✓ On réitère la construction précédente, à savoir on pose $x_2 = x_1 + h$, on écrit l'approximation affine de f au voisinage de x_2 :
  on pose $y_2 = f(x_1 + h)$ et on construit le point $A_2(x_2 ; y_2)$ et le segment $[A_1A_2]$
- ✓ et on recommence autant de fois que nécessaire.

On obtient ainsi une ligne polygonale approchant la courbe représentative de f.

Exemple n°1 : Découvrir la fonction f vérifiant $f(1) = 1$ et $f'(x) = 2x - 2$

1/ Activité papier-crayon : *Compléter* les calculs et le graphe ci-dessous:
Soit h = 0,5.

$x_0 =$ $y_0 =$
On construit $A_0(\dots ; \dots)$

$x_1 =$ et :
$f(x_0 + h) = f(x_0) + \cdots$
donc $f(x_1) = \cdots$
d'où $y_1 =$
On construit $A_1(\dots ; \dots)$

$x_2 =$

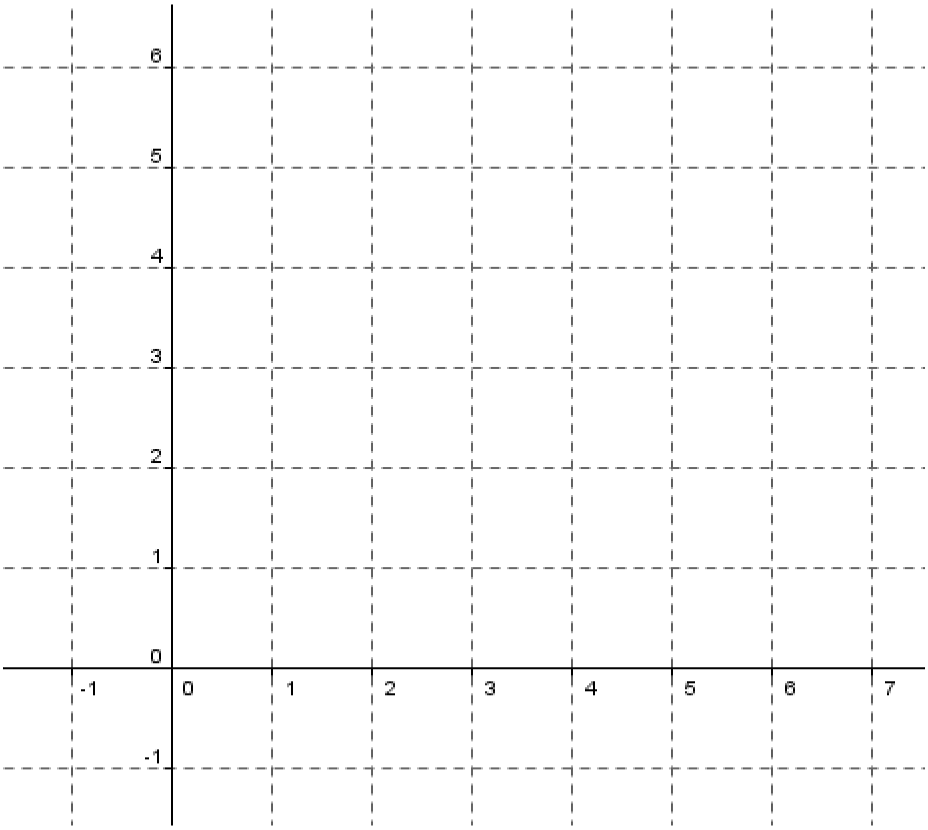
donc : $y_2 =$

$x_3 =$

donc : $y_3 =$

$x_4 =$

donc : $y_4 =$



$x_5 =$ donc : $y_5 =$
Bien entendu on pourrait continuer …….ou recommencer avec un pas plus petit …

2/ **<u>Activité avec l'ordinateur</u>** : lancer geogebra de la manière suivante
se connecter à Internet,
aller sur le site : geogebra,(utiliser un moteur de recherche ou saisir : http://www.geogebra.org/cms/)

cliquer sur Démarrer GeoGebra , puis sur Webstart

a/ *Afficher* le tableur de geogebra : menu affichage

b/ *Créer* dans la fenêtre de travail un curseur (icône : a = 2)que l'on nommera h, qui sera le pas, le définir de $-0{,}5$ à $0{,}5$ avec un incrément de $0{,}01$
(ce qui signifie que h varie de $-0{,}5$ à $0{,}5$ avec un pas de $0{,}01$)

Créer la fonction $f'(x) = 2x - 2$.

Dans la barre de saisie, en bas à gauche Saisie: f'(x)=2x-2 , valider, puis effacer la courbe construite (clic droit sur la courbe puis décocher afficher objet)

c/ *Compléter* le tableur de la manière suivante :

	A	B	C	D	E	F
1						
2	pas	0.5				
3		abscisse	ordonné...	points	segments	erreur
4	initial	1	1	(1, 1)		

Dans la cellule B2 ***saisir la formule*** =h
(ceci permettra au tableur de « récupérer » la valeur de h du curseur défini à la question précédente)
Les cellules B4 et C4 correspondent respectivement à x_0 et y_0.

Dans la cellule D4 ***saisir*** : =(B4 , C4) et observer la fenêtre de travail !

d/ Dans les cellules B5 et C5 vous allez saisir les formules correspondant à x_1 et y_1.
La formule de la cellule B5 est :

La formule de la cellule C5 est :

La formule de la cellule D5 est :

Dans la cellule E5 **saisir la formule** : =segment[D5 , D4]

Appeler le professeur pour validation

Sélectionner les cellules B5, C5, D5 et E5 puis étendre vers le bas (environ 20 lignes)

e/ Changer le pas en « déplaçant » h (pour être précis dans le déplacement, cliquer sur h puis utiliser les flèches droite, gauche du clavier) et observer ainsi la « courbe » construite. Ne pas oublier d'observer ce qui se passe avec un pas négatif !
Conjecturer une équation de la courbe ?
Valider votre conjecture en saisissant son équation sous la forme $f(x) = \dots$

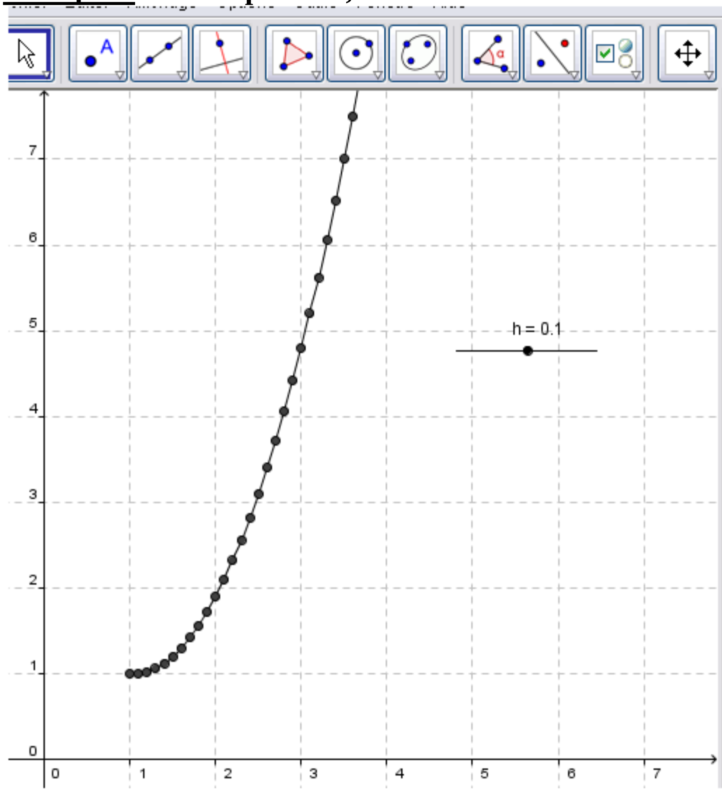
<u>remarques</u> :

Dans la cellule F5 saisir la formule =C5 - f(B5) afin de calculer l'erreur commise

<u>Exemple n°2</u> : <u>A la découverte d'une nouvelle fonction</u>
On admet qu'il existe une fonction f vérifiant l'équation différentielle $y' = y$ et $f(0) = 1$
1/ <u>préliminaire</u> :
En utilisant l'approximation affine de f au voisinage de x_0, montrer que $y_1 = y_0(1 + h)$.

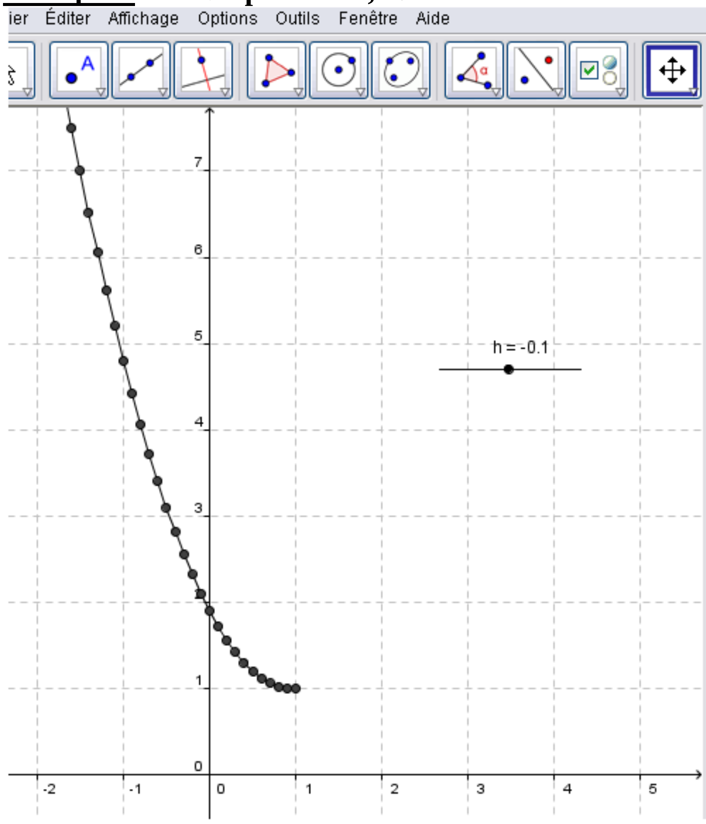
2/ Utiliser la méthode vue précédemment pour obtenir la courbe représentant la fonction f.

<u>Exemple 1</u> avec un pas de 0,1 :



	A	B	C	D	E	F
1						
2	pas	0.1				
3		abscisse	ordonnées	points	segments	erreur
4	initial	1	1	(1, 1)		
5		1.1	1	(1.1, 1)	0.1	0.01
6		1.2	1.02	(1.2, 1.02)	0.102	0.02
7		1.3	1.06	(1.3, 1.06)	0.1077	0.03
8		1.4	1.12	(1.4, 1.12)	0.1166	0.04
9		1.5	1.2	(1.5, 1.2)	0.1281	0.05
10		1.6	1.3	(1.6, 1.3)	0.1414	0.06
11		1.7	1.42	(1.7, 1.42)	0.1562	0.07
12		1.8	1.56	(1.8, 1.56)	0.172	0.08
13		1.9	1.72	(1.9, 1.72)	0.1887	0.09
14		2	1.9	(2, 1.9)	0.2059	0.1
15		2.1	2.1	(2.1, 2.1)	0.2236	0.11
16		2.2	2.32	(2.2, 2.32)	0.2417	0.12
17		2.3	2.56	(2.3, 2.56)	0.26	0.13
18		2.4	2.82	(2.4, 2.82)	0.2786	0.14
19		2.5	3.1	(2.5, 3.1)	0.2973	0.15
20		2.6	3.4	(2.6, 3.4)	0.3162	0.16
21		2.7	3.72	(2.7, 3.72)	0.3353	0.17
22		2.8	4.06	(2.8, 4.06)	0.3544	0.18
23		2.9	4.42	(2.9, 4.42)	0.3736	0.19
24		3	4.8	(3, 4.8)	0.3929	0.2

<u>Exemple 1</u> avec un pas de – 0,1 :

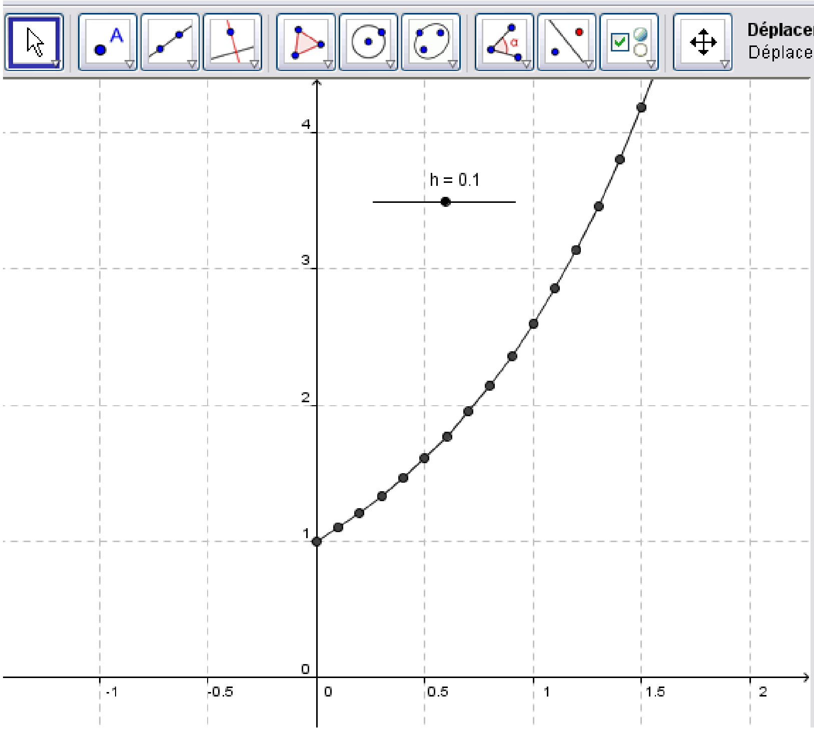


	A	B	C	D	E	F
1						
2	pas	-0.1				
3		abscisse	ordonnées	points	segments	erreur
4	initial	1	1	(1, 1)		
5		0.9	1	(0.9, 1)	0.1	0.01
6		0.8	1.02	(0.8, 1.02)	0.102	0.02
7		0.7	1.06	(0.7, 1.06)	0.1077	0.03
8		0.6	1.12	(0.6, 1.12)	0.1166	0.04
9		0.5	1.2	(0.5, 1.2)	0.1281	0.05
10		0.4	1.3	(0.4, 1.3)	0.1414	0.06
11		0.3	1.42	(0.3, 1.42)	0.1562	0.07
12		0.2	1.56	(0.2, 1.56)	0.172	0.08
13		0.1	1.72	(0.1, 1.72)	0.1887	0.09
14		0	1.9	(0, 1.9)	0.2059	0.1
15		-0.1	2.1	(-0.1, 2.1)	0.2236	0.11
16		-0.2	2.32	(-0.2, 2.32)	0.2417	0.12
17		-0.3	2.56	(-0.3, 2.56)	0.26	0.13
18		-0.4	2.82	(-0.4, 2.82)	0.2786	0.14
19		-0.5	3.1	(-0.5, 3.1)	0.2973	0.15
20		-0.6	3.4	(-0.6, 3.4)	0.3162	0.16
21		-0.7	3.72	(-0.7, 3.72)	0.3353	0.17
22		-0.8	4.06	(-0.8, 4.06)	0.3544	0.18
23		-0.9	4.42	(-0.9, 4.42)	0.3736	0.19
24		-1	4.8	(-1, 4.8)	0.3929	0.2

On reconnaît une parabole de sommet le point de coordonnées (1 ; 1) dont l’équation serait :

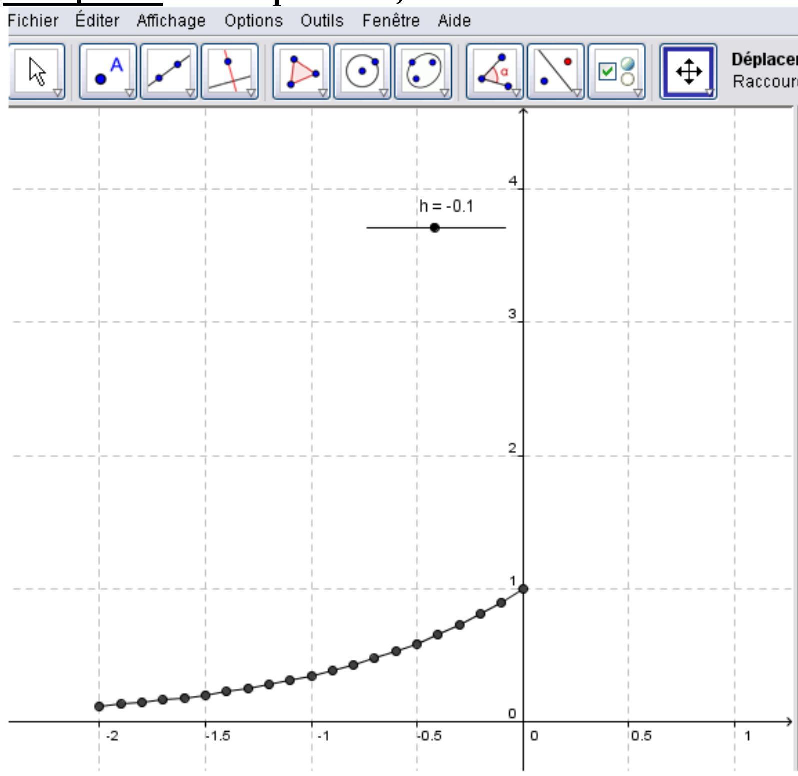
$$y = (x-1)^2 + 1$$

Exemple n°2 : avec un pas de 0,1



	A	B	C	D	E
1	Pas =	0.1			
2		abscisses	ordonnées	points	segments
3	initial	0	1	(0, 1)	
4		0.1	1.1	(0.1, 1.1)	0.1414
5		0.2	1.21	(0.2, 1.21)	0.1487
6		0.3	1.331	(0.3, 1.331)	0.157
7		0.4	1.4641	(0.4, 1.464...	0.1665
8		0.5	1.6105	(0.5, 1.610...	0.1773
9		0.6	1.7716	(0.6, 1.771...	0.1896
10		0.7	1.9487	(0.7, 1.948...	0.2034
11		0.8	2.1436	(0.8, 2.143...	0.219
12		0.9	2.3579	(0.9, 2.357...	0.2365
13		1	2.5937	(1, 2.5937)	0.2561
14		1.1	2.8531	(1.1, 2.853...	0.278
15		1.2	3.1384	(1.2, 3.138...	0.3023
16		1.3	3.4523	(1.3, 3.452...	0.3294
17		1.4	3.7975	(1.4, 3.797...	0.3594
18		1.5	4.1772	(1.5, 4.177...	0.3927
19		1.6	4.595	(1.6, 4.595)	0.4295
20		1.7	5.0545	(1.7, 5.054...	0.4703
21					
22					

Exemple n°2 avec un pas de – 0,1



	A	B	C	D	E
1	Pas =	-0.1			
2		abscisses	ordonnées	points	segments
3	initial	0	1	(0, 1)	
4		-0.1	0.9	(-0.1, 0.9)	0.1414
5		-0.2	0.81	(-0.2, 0.81)	0.1345
6		-0.3	0.729	(-0.3, 0.729)	0.1287
7		-0.4	0.6561	(-0.4, 0.65...	0.1238
8		-0.5	0.5905	(-0.5, 0.59...	0.1196
9		-0.6	0.5314	(-0.6, 0.53...	0.1161
10		-0.7	0.4783	(-0.7, 0.47...	0.1132
11		-0.8	0.4305	(-0.8, 0.43...	0.1108
12		-0.9	0.3874	(-0.9, 0.38...	0.1089
13		-1	0.3487	(-1, 0.3487)	0.1072
14		-1.1	0.3138	(-1.1, 0.31...	0.1059
15		-1.2	0.2824	(-1.2, 0.28...	0.1048
16		-1.3	0.2542	(-1.3, 0.25...	0.1039
17		-1.4	0.2288	(-1.4, 0.22...	0.1032
18		-1.5	0.2059	(-1.5, 0.20...	0.1026
19		-1.6	0.1853	(-1.6, 0.18...	0.1021
20		-1.7	0.1668	(-1.7, 0.16...	0.1017
21		-1.8	0.1501	(-1.8, 0.15...	0.1014
22		-1.9	0.1351	(-1.9, 0.13...	0.1011
23		-2	0.1216	(-2, 0.1216)	0.1009

La courbe obtenue est celle de la fonction exponentielle (on peut vérifier en saisissant $f(x) = \exp(x)$)