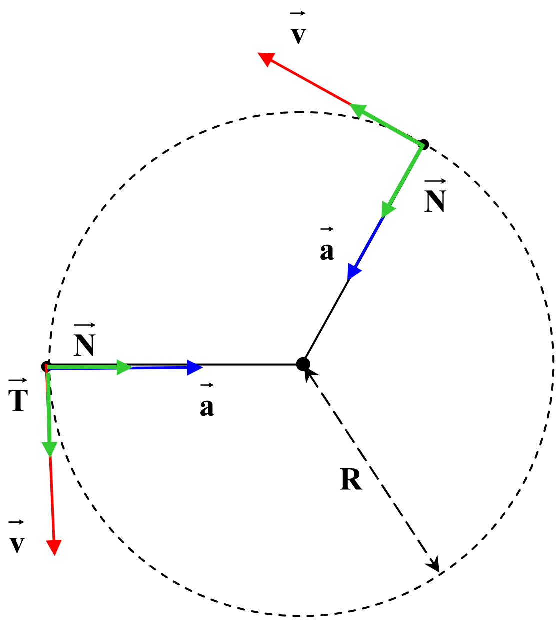
Chapitre 4 : Mouvement des satellites et planètes.

Objectifs :
- *Quelles sont les caractéristiques d'un mouvement circulaire uniforme ?*
- *Quelles sont les trois lois de Kepler ?*
- *Quel est le mouvement des planètes et des satellites ?*

I. Quelles sont les caractéristiques d'un mouvement circulaire uniforme ?

I.1. Vecteur accélération

- Un **mouvement est dit circulaire uniforme** si la trajectoire est un **cercle parcouru à une vitesse constante**. Attention le vecteur vitesse n'est pas constant (pas même direction !!!!)



- Si, en tout point de la trajectoire, le **vecteur accélération du centre d'inertie est radiale** (suivant le rayon) alors le **mouvement du centre d'inertie est circulaire uniforme. La réciproque est vraie** !

- Dans ce cas, l'accélération a pour expression : $\boxed{\overrightarrow{a_G} = \frac{v^2}{R} \cdot \vec{N}}$, sa valeur est constante et vaut : $\boxed{a_G = \frac{v^2}{R}}$

  v : la vitesse du centre d'inertie en $m \cdot s^{-1}$ et **R** : le rayon du cercle en m

  L'**accélération** est dite **centripète** (elle pointe vers le centre du cercle). On parle également d'accélération « normale » (c'est-à-dire perpendiculaire à la trajectoire).

I.2. Obtention d'un mouvement circulaire uniforme

- D'après la deuxième loi de Newton on sait que $\vec{F} = m \cdot \overrightarrow{a_G}$ or pour qu'un mouvement soit circulaire uniforme il faut que $\overrightarrow{a_G} = \frac{v^2}{R} \cdot \vec{N}$ (accélération centripète) donc :

Dans un référentiel galiléen, le mouvement du centre d'inertie d'un solide de masse **m** est circulaire uniforme si :

- la somme des forces extérieures $\vec{F} = \sum \overrightarrow{F_{ext}}$ est un **vecteur centripète** (ou radial ou normal)

et

- la **valeur de $\vec{F}$ est constante** et vaut : $F = m \cdot \frac{v^2}{R}$ (la masse **m** est exprimée en kg !) = C^{ste}

(comme la masse de l'objet ne varie pas alors la valeur de la vitesse est constante : $v = C^{ste}$)

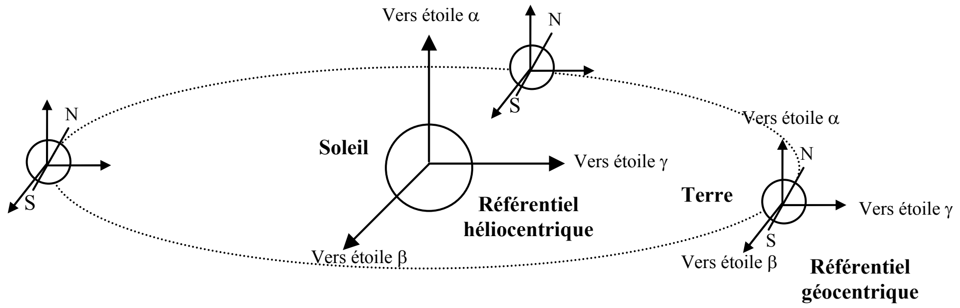
- ***Remarque*** : si la valeur de la vitesse n'est pas constante alors l'accélération et la résultante des forces extérieures ne sont plus centripètes, le vecteur accélération aura pour expression : $\boxed{\overrightarrow{\mathbf{a}_G} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{\mathbf{T}} + \frac{v^2}{R} \cdot \vec{\mathbf{N}}}$

II. Quelles sont les trois lois de Kepler ?

Johannes Kepler (1571 – 1630) formule trois lois qui décrivent le mouvement des planètes autour du Soleil suite aux résultats des observations de son maître Tycho Brahé (1546 – 1601).

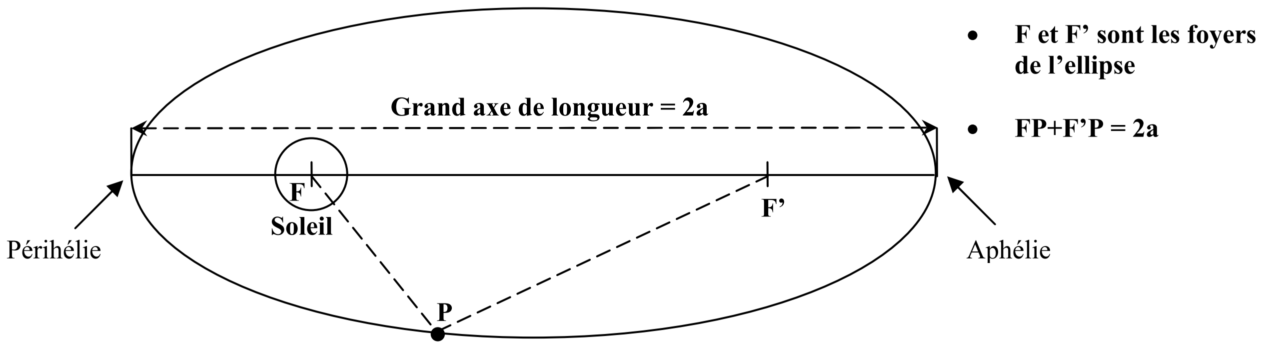
II.1. Rappels sur les référentiels

- Référentiel héliocentrique : repère ayant pour origine le centre du Soleil, ses trois axes sont dirigés vers trois étoiles fixes et lointaines.
- Référentiel géocentrique : repère ayant pour origine le centre de la Terre, ses trois axes sont dirigés vers trois étoiles fixes. Il est animé d'un mouvement de translation circulaire par rapport au référentiel héliocentrique.



II.2. Première loi : loi des trajectoires

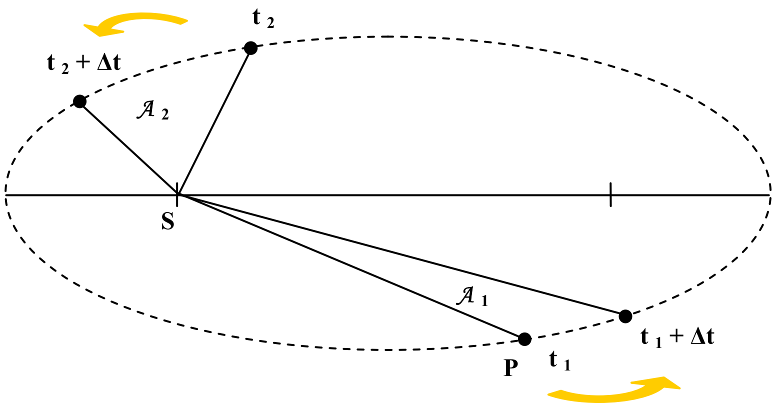
- Dans le référentiel héliocentrique, la trajectoire du centre d'une planète est une ellipse dont l'un des foyers est le centre du Soleil



- Le cercle est une ellipse dont les foyers sont confondus.

II.3. Deuxième loi : loi des aires

- Le segment de droite reliant le Soleil, S, à la planète, P, (le segment **[SP]**) balaie des aires $\mathcal{A}$ égales pendant des durées **Δt** égales.



II.4. Troisième loi : loi des périodes

- Pour toutes les planètes du système solaire, le rapport entre le carré de la période de révolution de la planète**T** et le cube du demi grand axe **a** de l'orbite elliptique est constant :

$$\boxed{\frac{T^2}{a^3} = k}$$

T est la période de révolution en **s**

a est le demi grand axe en **m**

k est une constante **indépendante de la planète considérée**.

Remarque : la période de révolution d'une planète autour du soleil est la durée pour qu'elle effectue un tour complet autour du Soleil.

III. Quel est le mouvement des planètes et des satellites ?

III.1. Rappel sur la loi de gravitation universelle

- Pour expliquer les lois du mouvement des planètes établies par Kepler, Newton a énoncé la loi de gravitation universelle qui traduit l'attraction de deux corps :

L'interaction gravitationnelle entre deux corps ponctuels A et B, de masses respectives $\mathbf{m_A}$ et $\mathbf{m_B}$, est modélisée par des **forces d'attraction gravitationnelle** $\overrightarrow{F_{A/B}}$ et $\overrightarrow{F_{B/A}}$ dont les caractéristiques sont :

$$\boxed{\overrightarrow{F_{A/B}} = -\overrightarrow{F_{B/A}} = -G \cdot \frac{m_A \cdot m_B}{AB^2} \cdot \overrightarrow{u_{AB}}}$$

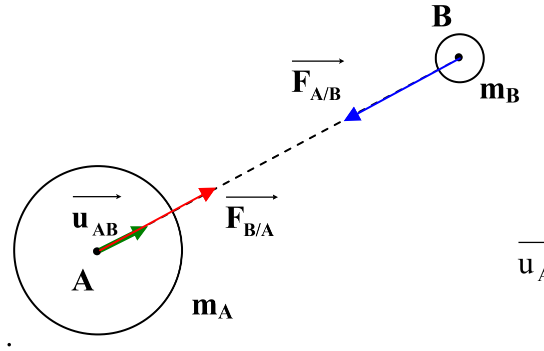
G = constante de gravitation universelle = $6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$

$\mathbf{m_A}$ et $\mathbf{m_B}$ sont exprimées en **kg**

AB est la distance en **m** entre les deux centres des corps A et B

$\overrightarrow{u_{AB}}$ est un vecteur unitaire (norme égale à 1) dirigé de A vers B

- La loi s'applique également pour :
  - des corps à répartition sphérique de masse, tout se passe comme si la masse était concentrée au centre du corps c'est le cas du Soleil, des planètes, des satellites….
  - des corps suffisamment éloignés l'un de l'autre de telle sorte que l'on puisse négliger leur dimension devant la distance qui les sépare.

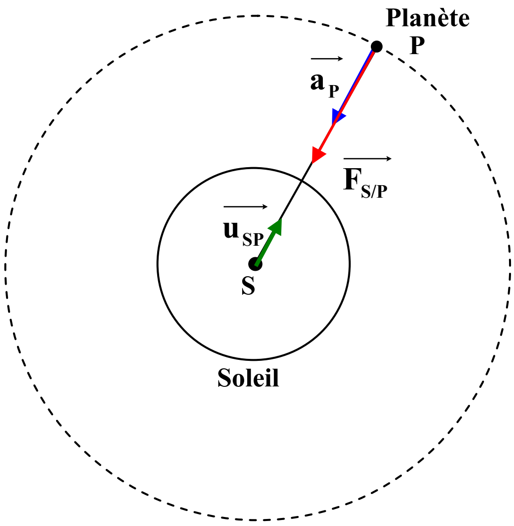


$$\overrightarrow{u_{AB}} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\|AB\|}$$

III.2. Mouvement des planètes autour du Soleil

- Etudions le mouvement d'une planète, de centre P de masse $\mathbf{m_P}$, qui tourne autour du Soleil, de centre S de masse $\mathbf{M_S}$, dans le référentiel héliocentrique considéré galiléen :
- La seule force extérieure qui s'applique sur la planète est la force d'attraction gravitationnelle exercée par le Soleil notée $\overrightarrow{\mathbf{F_{S/P}}}$. D'après la deuxième loi de Newton on aura ainsi :
- $\overrightarrow{\mathbf{F_{S/P}}} = \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{\mathbf{a_P}}$ ce qui conduit à $-G \cdot \dfrac{M_S \cdot m}{SP^2} \cdot \overrightarrow{u_{SP}} = m \cdot \overrightarrow{a_P}$ soit $-G \cdot \dfrac{M_S \cdot m}{R^2} \cdot \overrightarrow{u_{SP}} = m \cdot \overrightarrow{a_P}$

  avec **R = SP** : ***distance entre le centre de la planète et le centre du Soleil*** en **m**.



ainsi on trouve que $\overrightarrow{\mathbf{a_P}} = -\mathbf{G} \cdot \dfrac{\mathbf{M_S}}{\mathbf{R^2}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{u_{SP}}}$ donc l'accélération est radiale (dirigée vers le centre du Soleil)

- Or si l'accélération est centripète d'après le **I.** on peut écrire que $\mathbf{a_P} = \dfrac{\mathbf{v^2}}{\mathbf{R}}$ avec **v** = vitesse de la planète

  donc on en déduit que $\dfrac{v^2}{R} = G \cdot \dfrac{M_S}{R^2}$ soit $v^2 = G \cdot \dfrac{M_S}{R}$ donc : $\mathbf{v} = \sqrt{\mathbf{G} \cdot \dfrac{\mathbf{M_S}}{\mathbf{R}}}$

  ⇨ La vitesse de la planète est constante et les deux conditions d'un mouvement circulaire uniforme sont remplies.
- Ainsi le mouvement circulaire uniforme est une solution à la deuxième loi de Newton pour le mouvement orbital des planètes à condition que la vitesse du centre d'inertie de la planète vérifie l'expression :

$$\boxed{\mathbf{v} = \sqrt{\mathbf{G} \cdot \frac{\mathbf{M_S}}{\mathbf{R}}}}$$

$\mathbf{M_S}$ est en **kg** ; **R** en **m** et **v** en $\mathbf{m \cdot s^{-1}}$.

La valeur de la vitesse de la planète ne dépend pas de la masse de la planète mais de la masse du Soleil !

III.3. Expression de la période de révolution

- La **période de révolution T** (en **s**) d'une planète autour du Soleil est la **durée que met la planète pour effectuer un tour complet autour du Soleil** à la vitesse **v**.
- En considérant un mouvement circulaire (de rayon R) uniforme (à la vitesse constante v) on en déduit que :

$\mathbf{T} = \dfrac{\mathbf{2\pi \cdot R}}{\mathbf{v}}$ or $v = \sqrt{G \cdot \dfrac{M_S}{R}}$ soit $T = \dfrac{2\pi \cdot R \cdot \sqrt{R}}{\sqrt{G \cdot M_S}}$ autrement dit : $T^2 = \dfrac{4\pi^2 \cdot R^3}{G \cdot M_S}$ d'où :

$$\boxed{\frac{\mathbf{T}^2}{\mathbf{R}^3} = \frac{4\pi^2}{\mathbf{G} \cdot \mathbf{M_S}}}$$ **T** en **s** ; **R** en **m** et $\mathbf{M_S}$ en **kg**

- On retrouve ainsi la Troisième loi de Kepler (loi des périodes) pour une planète en mouvement circulaire uniforme autour du Soleil (le demi grand axe **a** correspond ici au rayon **R**).
- *Remarque* : la connaissance de **T** et de **R** permet alors de calculer la masse du Soleil $\mathbf{M_S}$!

III.4. Mouvement des satellites autour de la Terre

- Etudions maintenant le cas d'un satellite en orbite autour de la Terre. On se placera donc dans le référentiel géocentrique.
- Par analogie au raisonnement tenu dans le paragraphe ***III.2.*** on trouve qu'un satellite est en mouvement circulaire uniforme autour de la Terre sur une orbite de rayon **R** à condition que la vitesse **v** du satellite vérifie la relation suivante : $\mathbf{v} = \sqrt{\mathbf{G} \cdot \frac{\mathbf{M_T}}{\mathbf{R}}}$
- En appelant **h** l'altitude (en **m**) du satellite par rapport à la surface terrestre on peut écrire que :

$$\mathbf{v} = \sqrt{\mathbf{G} \cdot \frac{\mathbf{M_T}}{\mathbf{R_T} + \mathbf{h}}}$$

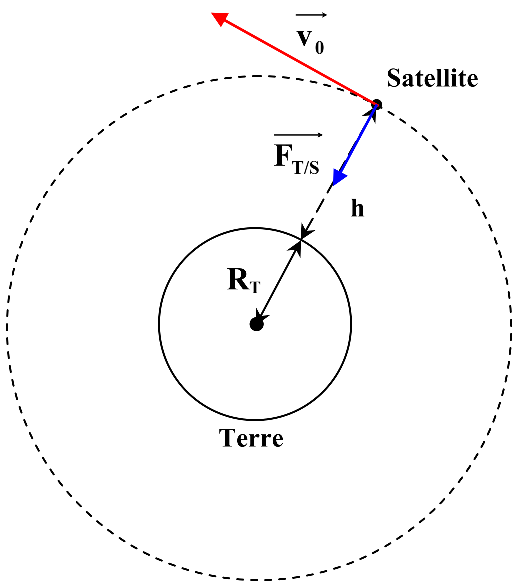
- On réalise également le même raisonnement qu'au paragraphe ***III.3***. et on obtient la relation qui lie la période de révolution du satellite autour de la Terre avec l'altitude à laquelle il se trouve :

$$\boxed{\frac{\mathbf{T}^2}{(\mathbf{R_T} + \mathbf{h})^3} = \frac{4\pi^2}{\mathbf{G} \cdot \mathbf{M_T}}}$$

La troisième loi de Kepler s'applique également dans le cas du mouvement des satellites autour de la Terre !

⇨ Vitesse et période de révolution du satellite sont indépendants de la masse du satellite mais dépendent de la masse de la Terre $\mathbf{M_T}$ et de l'altitude **h** à laquelle il se trouve.

Pour une mise en orbite circulaire (rayon **R**) d'un satellite à une altitude **h**, sa vitesse initiale de lancement est imposée par la relation $v_0 = \sqrt{G \cdot \frac{M_T}{R_T + h}}$ et son vecteur vitesse $\overrightarrow{\mathbf{v_0}}$ doit être perpendiculaire à la direction de la force d'attraction gravitationnelle de la Terre sur le satellite $\overrightarrow{\mathbf{F_{T/S}}}$.



III.5. Satellites géostationnaires

- Un **satellite géostationnaire** est un satellite qui est **toujours positionné au dessus du même point de la surface terrestre** (à la même verticale).
- Un satellite **géostationnaire** est un satellite :
  - qui semble **immobile pour un observateur terrestre** ;
  - qui **tourne dans le même sens** que celui de la Terre **autour du même axe de rotation** (axe des pôles)
  - et qui a une **période de révolution T égale à la période de rotation de la Terre sur elle-même**.
- Pour satisfaire les conditions citées précédemment, **l'orbite circulaire d'un satellite géostationnaire est donc contenue dans le plan équatorial de la Terre** !
- Calculons l'altitude à laquelle doit se trouver un satellite pour être géostationnaire :

  On sait que la période de révolution du satellite est égale à la période de rotation de la Terre sur elle-même qui est T = 23 h 56 mn 04 s = 86 164 s. Or on sait que $\frac{\mathbf{T^2}}{\mathbf{(R_T + h)^3}} = \frac{\mathbf{4\pi^2}}{\mathbf{G \cdot M_T}}$ donc $(R_T + h)^3 = \frac{T^2 \cdot G \cdot M_T}{4\pi^2}$

  d'où $(R_T + h) = \sqrt[3]{\frac{T^2 \cdot G \cdot M_T}{4\pi^2}} = \left(\frac{T^2 \cdot G \cdot M_T}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}}$ et

$$\mathbf{h} = \sqrt[3]{\frac{\mathbf{T^2 \cdot G \cdot M_T}}{\mathbf{4\pi^2}}} - \mathbf{R_T} = \sqrt[3]{\frac{86164^2 \times 6{,}67 \cdot 10^{-11} \times 5{,}98 \cdot 10^{24}}{4\pi^2}} - 6380 \cdot 10^3 = \mathbf{3{,}58 \cdot 10^7\,m}$$

- Un satellite géostationnaire se trouve à une altitude **d'environ h = 36 000 km au dessus de la surface terrestre** (il se situe donc à une orbite de 42 000 km par rapport au centre de la Terre).

III.6. Mouvement des satellites autour des autres planètes

- Le raisonnement tenu dans le cas du mouvement des satellites autour de la Terre ou des planètes autour du Soleil reste identique dans le cas des satellites qui gravitent autour d'une planète quelconque de masse **M**. On retrouvera l'expression de la Troisième de Kepler :

$$\boxed{\frac{\mathbf{T^2}}{\mathbf{R^3}} = \frac{\mathbf{4\pi^2}}{\mathbf{G \cdot M}}}$$

  R étant le rayon de l'orbite du satellite en **m**

  M est la masse de la planète en **kg**.

- Cette relation permet de déterminer la masse **M** de la planète considérée à condition de connaître la période de révolution **T** du satellite autour de la planète et de connaître le rayon **R** de l'orbite du satellite.

III.7. L'impesanteur

- L'**impesanteur** est caractérisée par **l'absence apparente de pesanteur**.
- Exemples :
  - Une personne dans une cabine d'ascenseur subit l'action de l'attraction terrestre (son poids) $\vec{\mathbf{P}}$ et la réaction de la cabine $\vec{\mathbf{R}}$ soit $\vec{\mathbf{P}} + \vec{\mathbf{R}} = \mathbf{m} \cdot \vec{\mathbf{a}}$. Lorsque la cabine tombe en chute libre la personne est alors soumise à la même accélération que la cage (chute libre $\vec{\mathbf{g}} = \vec{\mathbf{a}}$) soit $\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{0}}$ et la personne semble « flotter » dans l'espace de la cabine.
  - cas d'un spationaute qui se trouve dans un véhicule spatial en orbite autour de la Terre: le véhicule et le spationaute ont la même accélération, ils sont tous les deux soumis à la force d'attraction gravitationnelle. Le spationaute aura donc le même mouvement que sa cabine et ne ressent plus les effets de la pesanteur et semblera donc « flotter » dans le véhicule spatial.