Voyage autour de Saturne

En Juillet 2004, la sonde européenne Cassini-Huygens nous a livré ses premiers clichés des anneaux de Saturne.
Elle a également photographié Titan, le plus gros satellite de Saturne, situé à une distance R_T de Saturne.
L'excentricité orbitale des satellites étant très faible, on supposera leurs trajectoires circulaires.
Dans tout l'exercice, on se place dans le référentiel saturno-centrique, centré sur Saturne et dont les trois axes sont dirigés vers trois étoiles lointaines supposées fixes.
On considère que la planète Saturne et ses satellites sont des corps dont la répartition des masses est à symétrie sphérique. Les rayons des orbites des satellites sont supposés grands devant leur taille.

Données : $G = 6{,}67\times10^{-11}$ S.I. : constante de gravitation universelle.
Concernant Titan : $R_T = 1{,}22\times10^{6}$ km (rayon de l'orbite de Titan).
Concernant Saturne : $R_S = 6{,}0\times10^{4}$ km (rayon de la planète Saturne).
T_S = 10 h 39 min (période de rotation de Saturne sur elle-même).
$M_S = 5{,}69\times10^{26}$ kg (masse de Saturne).

1. Quelques caractéristiques de Titan :

1.1. Forces

On considère que la seule force gravitationnelle exercée sur Titan provient de Saturne.

1.1.1. Nommer la (les) force(s) extérieure(s) appliquée(s) au satellite Titan, de masse M_T.

1.1.2. Représenter qualitativement sur un schéma, Saturne, Titan, et la (les) force(s) extérieure(s) appliquée(s) sur Titan.

1.1.3. Donner l'expression vectorielle de cette (ces) force(s).

1.2. Accélération et vitesse

On étudie le mouvement du centre d'inertie T de Titan. S est le centre d'inertie de Saturne.
Soit $\vec{u}$ le vecteur unitaire porté par la droite ST dirigé de S vers T.

1.2.1. Exprimer son accélération vectorielle $\vec{a}$ en précisant la loi utilisée.

1.2.2. On se place dans la base orthonormée ($\vec{t}$, $\vec{n}$) centrée en T dans laquelle $\vec{t}$ est un vecteur unitaire porté par la tangente à la trajectoire et orienté dans le sens du mouvement et $\vec{n}$ un vecteur unitaire perpendiculaire à $\vec{t}$ et dirigé vers l'intérieur de la trajectoire ($\vec{n} = -\vec{u}$).
On donne l'expression de $\vec{a}$ dans la base orthonormée ($\vec{t}$, $\vec{n}$) : $\vec{a} = a_t\,\vec{t} + a_n\,\vec{n}$.
Donner les expressions littérales de a_t et de a_n en fonction de la vitesse v du satellite.

1.2.3. À quelle composante se réduit l'accélération vectorielle $\vec{a}$ de Titan dans la base orthonormée ($\vec{t}$, $\vec{n}$) ? Compléter alors le schéma précédent, avec la base orthonormée ($\vec{t}$, $\vec{n}$) et l'accélération $\vec{a}$ de Titan.

1.3. Type de mouvement

1.3.1. Montrer que le mouvement de Titan est uniforme.

1.3.2. Retrouver l'expression de la vitesse de Titan sur son orbite autour de Saturne : $v = \sqrt{\dfrac{GM_S}{R_T}}$

2. D'autres satellites de Saturne :

Après le survol de Titan, la sonde Cassini a survolé le satellite Encelade en février 2005.
On peut considérer que dans le référentiel saturno-centrique, Encelade à un mouvement de révolution circulaire uniforme, dont la période (en jour terrestre), est $T_E = 1{,}37$ et le rayon est R_E.

2.1. Loi de Kepler

La relation qui lie la période T de révolution d'un satellite, sa vitesse v et le rayon R de son orbite est $T = \dfrac{2\pi R}{v}$. Sa vitesse de révolution autour de Saturne est donnée par : $v = \sqrt{\dfrac{GM_S}{R}}$.

2.1.1. Retrouver la troisième loi de Kepler $\dfrac{T^2}{R^3} = \dfrac{4\pi^2}{GM_S}$.

2.1.2. Utiliser la troisième loi de Kepler pour déterminer la valeur du rayon R_E de l'orbite d'Encelade.

3. <u>Sonde saturno-stationnaire :</u>

On cherche dans cette partie à déterminer l'altitude h à laquelle devrait se trouver la sonde Cassini pour être saturno-stationnaire (immobile au-dessus d'un point de l'équateur de Saturne).

3.1. Quelle condition doit-on avoir sur les périodes Ts (rotation de Saturne sur elle-même) et Tc (révolution de Cassini autour de Saturne) pour que la sonde soit « saturno-stationnaire »?

3.2. Altitude de la sonde

3.2.1. En utilisant la troisième loi de Kepler donnée à la question **2.1.1.** , montrer que l'altitude h de la sonde peut se calculer avec la relation: $h = \sqrt[3]{\frac{T_C^2 G M_S}{4\pi^2}} - R_S$

3.2.2. Calculer la valeur de h.

<u>Des lois de Kepler à l'étude d'un astéroïde</u>

L'objectif de cet exercice est d'étudier le mouvement de quelques planètes du système solaire et de déterminer la masse de l'astéroïde Rhea Sylvia, récemment découvert par une équipe d'astronomes. Celui-ci a la forme d'une grosse pomme de terre mesurant quelques centaines de kilomètres.

Par souci de simplification, dans tout l'exercice, les astres étudiés sont considérés à répartition sphérique de masse.

<u>Donnée :</u> constante de gravitation universelle $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ *S.I*

Les représentations vectorielles demandées sont à effectuer sans souci d'échelle.

1. <u>En hommage à Kepler</u>

« Johannes Kepler, né le 27 décembre 1571 à Weil der Stadt, près de Stuttgart (Allemagne), mort le 15 novembre 1630 à Ratisbonne, est un astronome célèbre. Il a étudié et confirmé l'hypothèse héliocentrique (la Terre tourne autour du Soleil) de Nicolas Copernic. Il a également découvert que les trajectoires des planètes n'étaient pas des cercles parfaits centrés sur le Soleil mais des ellipses. En outre, il a énoncé les lois (dites lois de Kepler) qui régissent les mouvements des planètes sur leurs orbites. »

1.1. <u>Planètes en orbite elliptique.</u>

La figure 10 ci-dessous représente la trajectoire elliptique du centre d'inertie M d'une planète du système solaire de masse m dans le référentiel héliocentrique considéré galiléen. Les deux foyers F_1 *et* F_2 *de l'ellipse et son centre O sont indiqués.*

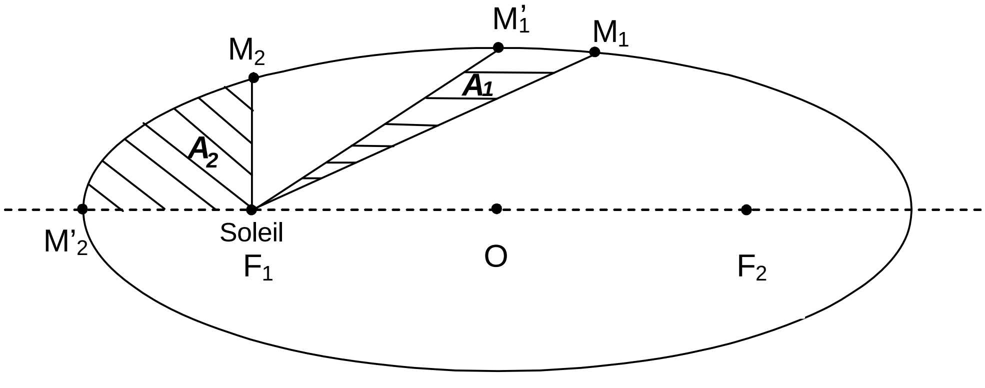

Figure 10

1.1.1. En utilisant une des lois de Kepler, justifier la position du Soleil indiquée sur la figure 10.

1.1.2. On suppose que les durées de parcours entre les points M_1 et M'_1 puis M_2 et M'_2 sont égales. En utilisant une des lois de Kepler, trouver la relation entre les aires hachurées A_1 et A_2 sur la figure 10.

1.1.3. La valeur de la vitesse moyenne entre les points M_1 et M'_1 est-elle inférieure, égale ou supérieure à celle entre les points M_2 et M'_2 ? Justifier.

1.2. <u>Planètes en orbite circulaire.</u>

Dans cette partie, pour simplifier, on modélise les trajectoires des planètes du système solaire dans le référentiel héliocentrique par des cercles de rayon r dont le centre O est le Soleil de masse M_S.

1.2.1. Représenter sur la ***FIGURE 11 DE L'ANNEXE*** la force de gravitation $\vec{F_3}$ exercée par le Soleil sur une planète quelconque du système solaire de masse *m* dont le centre d'inertie est situé au point M_3.

1.2.2. Donner l'expression vectorielle de cette force au point M_3, en utilisant le vecteur unitaire $\vec{u}$.

Pour la suite on considère que les valeurs des autres forces de gravitation s'exerçant sur la planète sont négligeables par rapport à la valeur de $\vec{F_3}$.

1.2.3. En citant la loi de Newton utilisée, déterminer l'expression du vecteur accélération $\vec{a_3}$ du centre d'inertie d'une planète quelconque de masse *m* du système solaire dont le centre d'inertie est situé au point M_3.

1.2.4. Représenter sur la ***FIGURE 11 DE L'ANNEXE*** les vecteurs accélérations $\vec{a_3}$ et $\vec{a_4}$ du centre d'inertie d'une planète quelconque du système solaire respectivement aux points M_3 et M_4.

1.2.5. En déduire la nature du mouvement du centre d'inertie d'une planète quelconque de masse *m* du système solaire.

1.2.6. Le graphe de la ***FIGURE 12 DE L'ANNEXE*** représente l'évolution du carré de la période de révolution des planètes Terre, Mars et Jupiter en fonction du cube du rayon de leur orbite. Ce graphe est-il en accord avec la troisième loi de Kepler ?

1.2.7. En utilisant le graphe de la ***FIGURE 12 DE L'ANNEXE***, montrer que

$$\frac{T^2}{r^3} \approx 3{,}0 \times 10^{-19} \text{ S.I.}$$

1.2.8.

> « *Une équipe composée de Franck Marchis (université de Californie à Berkeley) et de trois astronomes de l'Observatoire de Paris, Pascal Descamps, Daniel Hestroffer et Jérome Berthier, vient de découvrir un astéroïde, nommé Rhea Sylvia, qui gravite à une distance constante du Soleil avec une période de révolution de 6,521 ans.* »
>
> *D'après un article paru dans LE MONDE le 13.07.2005*

À l'aide des données de l'article précédent et du résultat de la question 1.2.7., calculer la distance séparant les centres respectifs de Rhea Sylvia et du Soleil.

Donnée : 1 an = 365 jours

2. <u>La troisième loi de Kepler comme balance cosmique…</u>

> *« Grâce au Very Large Telescope de l'European Southern Observatory (ESO) au Chili, les astronomes ont également découvert que Rhea Sylvia était accompagné de deux satellites baptisés Remus et Romulus. Leurs calculs ont montré que les deux satellites décrivent une orbite circulaire autour de Rhea Sylvia ; Romulus effectue son orbite en 87,6 heures. Les distances entre chaque satellite et Rhea Sylvia sont respectivement de 710 kilomètres pour Remus et 1360 kilomètres pour Romulus.»*
>
> *D'après un article paru dans LE MONDE le 13.07.2005*

On s'intéresse désormais au mouvement circulaire uniforme du centre d'inertie d'un satellite de Rhéa Sylvia. L'étude est faite dans un référentiel "Rhéa Sylvia-centrique" muni d'un repère dont l'origine est le centre de Rhéa Sylvia et dont les trois axes sont dirigés vers des étoiles fixes.

2.1. On rappelle que la troisième loi de Kepler a pour expression littérale : $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M}$. Dans le cadre de l'étude du mouvement de Remus et Romulus autour de Rhea Sylvia, donner la signification de chaque grandeur et son unité. En déduire l'unité de G dans le système international.

2.2. À l'aide des données de l'article précédent et de la troisième loi de Kepler, déterminer la masse de l'astéroïde Rhea Sylvia.

ANNEXE

Questions 1.2.1 et 1.2.4.

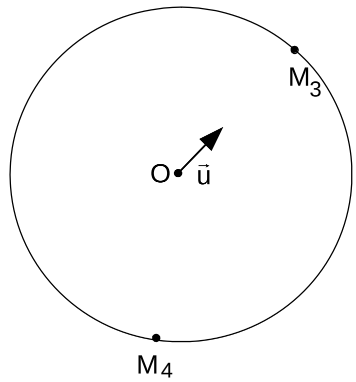

Figure 11

Questions 1.2.6. et 1.2.7.

$T^2 = f(r^3)$

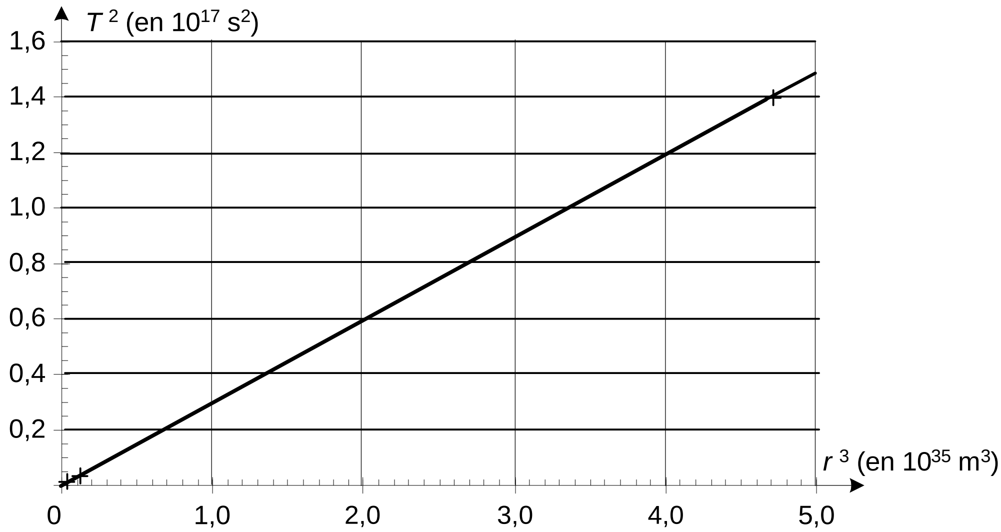

Figure 12

Etude de satellites d'observation

Les satellites d'observation sont des objets spatiaux en orbite circulaire autour de la Terre. Leur mission principale est d'effectuer des observations de l'atmosphère, des océans, des surfaces émergées et des glaces, et de transmettre à une station terrestre les données ainsi obtenues.

1. <u>ENVISAT : un satellite circumpolaire.</u>

C'était le plus gros satellite européen d'observation lors de son lancement le 1er mars 2002. Ses capteurs peuvent recueillir des données à l'intérieur d'une bande de largeur au sol de 3000 km permettant une observation biquotidienne de l'ensemble de la planète.

<u>Données :</u> Constante de gravitation universelle : G = $6,67 \times 10^{-11}$ USI

ENVISAT : masse : m = 8200 kg ; altitude moyenne : h = 800 km
orbite contenue dans un plan passant par les pôles

TERRE : masse : M = $5,98 \times 10^{24}$ kg ; rayon : R = $6,38 \times 10^{3}$ km
période de rotation propre : 1436 minutes

On rappelle l'expression de la valeur de la force d'interaction gravitationnelle entre deux corps de masse m_A et m_B, de centres A et B, de répartition de masse à symétrie sphérique, distants de d = AB :

$$F = G.\frac{m_A m_B}{d^2}$$

1.1.1. Représenter sur la **figure 1 de l'ANNEXE** la force d'interaction gravitationnelle exercée par la Terre (sa répartition de masse étant supposée à symétrie sphérique) sur le satellite supposé ponctuel et noté S. Donner l'expression vectorielle de cette force en représentant le vecteur unitaire choisi sur la **figure 1.**

1.1.2. Calculer la valeur de cette force.

1.2. En considérant la seule action de la Terre, établir l'expression vectorielle de l'accélération du satellite dans le référentiel géocentrique, supposé galiléen, en fonction de M, h et R.

1.3.Sur la figure 2 de l'ANNEXE, représenter, sans souci d'échelle, le vecteur accélération à trois dates différentes correspondant aux positions A, B et C du satellite.

1.4. Montrer que, dans le cas d'un mouvement circulaire, dont on admettra sans démonstration qu'il est uniforme, la vitesse du satellite a pour expression : $v = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}$.

1.5. Calculer la vitesse du satellite en $km.s^{-1}$.

1.6. Donner l'expression de la période de révolution du satellite en fonction de sa vitesse et des caractéristiques de la trajectoire R et h. Puis calculer sa valeur.

2. <u>METEOSAT 8 : un satellite géostationnaire.</u>

Ce satellite a été lancé par ARIANE 5 le 28 août 2002. Il est opérationnel depuis le 28 janvier 2004.

La position d'un satellite géostationnaire parait fixe aux yeux d'un observateur terrestre. Situé à une altitude H voisine de 36000 km, il fournit de façon continue des informations couvrant une zone circulaire représentant environ 42% de la surface de la Terre.

2.1. Donner les trois conditions à remplir par METEOSAT 8 pour qu'il soit géostationnaire.

2.2. Troisième loi de Képler dans le cas général d'une trajectoire elliptique :

Pour tous les satellites, le rapport entre le carré de la période de révolution T et le cube du demi-grand axe r *de sa trajectoire est le même :* $\frac{T^2}{r^3}$ *= constante = K.*

Dans le cas d'une trajectoire circulaire r correspond au rayon de la trajectoire.

En utilisant les réponses aux questions **1.4** et **1.6**, établir l'expression de la constante K en fonction de G et M pour les satellites étudiés. Calculer K dans le système international d'unités.

2.3. En déduire, pour METEOSAT 8, la valeur de R+H, puis celle de H.

2.4. La mise en place du satellite sur l'orbite géostationnaire s'effectue en plusieurs étapes.

Tout d'abord, ARIANE 5 amène le satellite hors de l'atmosphère et le largue sur une orbite de transfert. L'orbite de transfert parcourue par le satellite est une ellipse (voir **figure 3 de L'ANNEXE**) dont le périgée **P** se situe à une altitude voisine de 200 km et l'apogée **A** à l'altitude de l'orbite géostationnaire voisine de 36000 km.

Ensuite le « moteur d'apogée » du satellite lui permettra d'obtenir la vitesse nécessaire à sa mise sur orbite géostationnaire lors des passages successifs par l'apogée.

2.4.1. À l'aide des données ci-dessus, calculer la longueur r du demi-grand axe de la trajectoire sur cette orbite de transfert.

2.4.2. À l'aide de la troisième loi de Képler, en déduire la période T du satellite sur cette orbite de transfert.

ANNEXE

figure 1 :

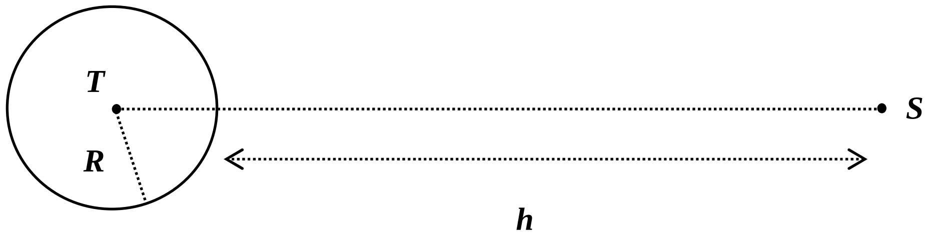

figure 2 :

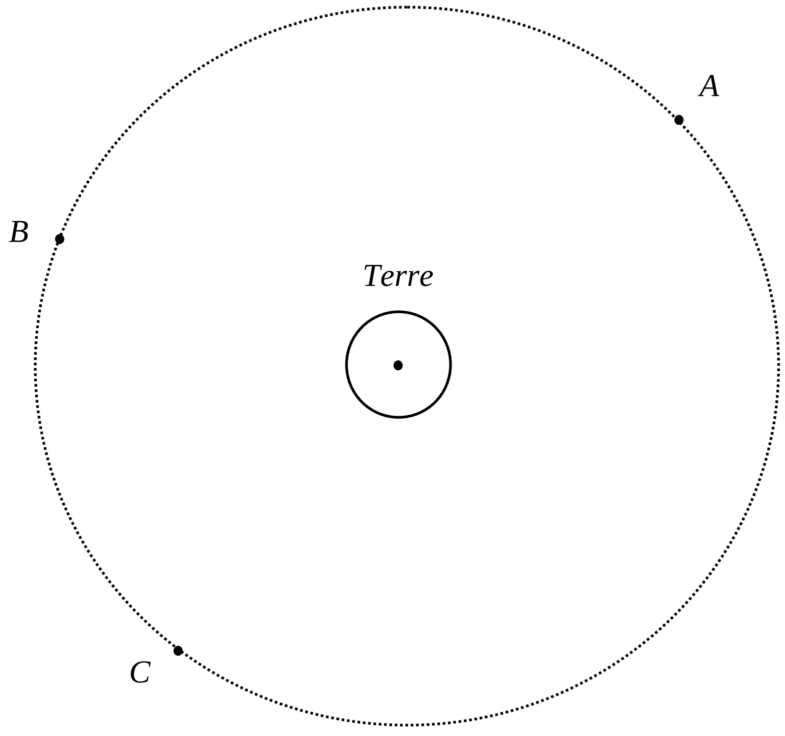

figure 3 :