

## Corrigé du devoir surveillé n°3

### Exercice 1

1. (a) Appelons  $\mathcal{C}_1$ , le cercle de diamètre  $[OA]$ .

$M(x, y)$  appartient à  $\mathcal{C}_1$  si et seulement si  $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OA} = 0 \iff x(x - a) + y^2 = 0$ .

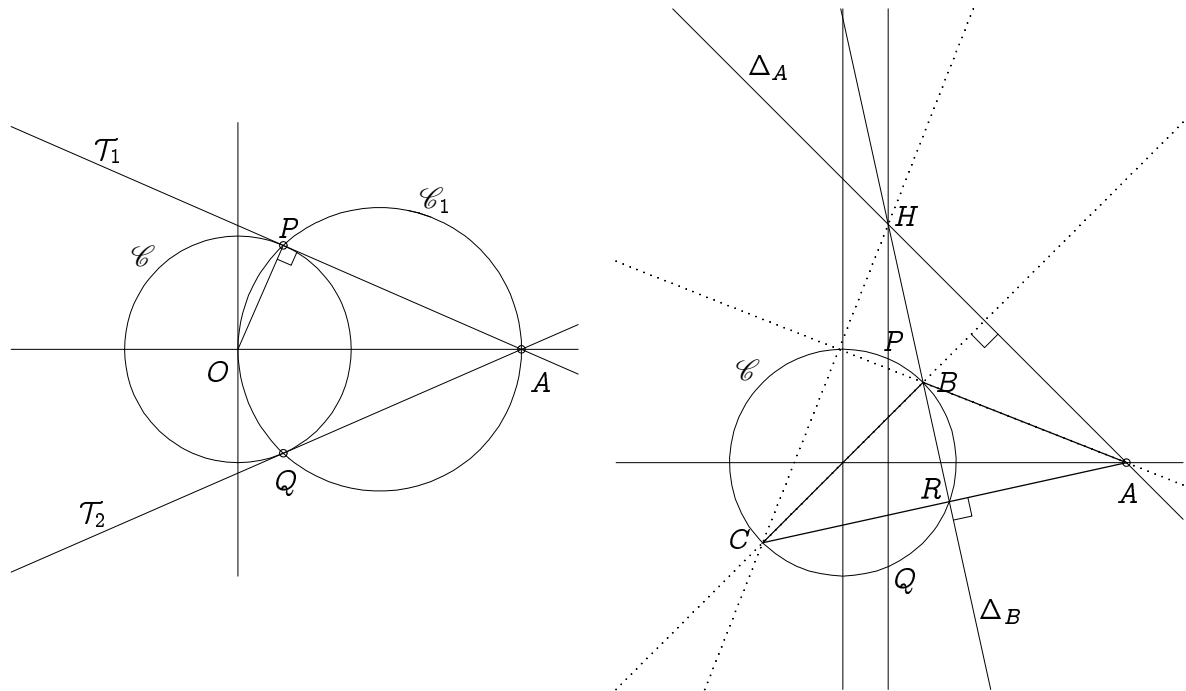
Une équation du cercle de diamètre  $[OA]$  est :  $x^2 + y^2 - ax = 0$

(b) Les points  $P$  et  $Q$  sont les points du cercle  $\mathcal{C}$  tels que  $(OP) \perp (AP)$  et  $(OQ) \perp (AQ)$  : ce sont les points d'intersection de  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}_1$ .

On résout  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 - ax = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ ax = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{a} \\ y = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{a^2}} \end{cases}$

Les coordonnées de  $P$  et  $Q$  sont  $(\frac{1}{a}, \sqrt{1 - \frac{1}{a^2}})$  et  $(\frac{1}{a}, -\sqrt{1 - \frac{1}{a^2}})$

(c) Une équation cartésienne de la droite  $(PQ)$  est  $x = \frac{1}{a}$



2. (a) Un vecteur normal à  $\Delta_A$  est  $\overrightarrow{BC}$  mais aussi  $\overrightarrow{u}(\theta)(\cos(\theta), \sin(\theta))$  qui lui est colinéaire.  $\Delta_A$  passe par le point  $A$ , et admet donc comme équation cartésienne :

$\Delta_A : \cos(\theta)x + \sin(\theta)y = a \cos(\theta)$ .

(b)  $(PQ)$  est de vecteur normal  $\vec{i}$  et  $\Delta_A$  est de vecteur normal  $\overrightarrow{u}(\theta)$  avec  $\theta \neq 0 [\pi]$ . Donc  $\vec{i}$  et  $\overrightarrow{u}(\theta)$  ne sont pas colinéaires et  $\Delta_A$  et  $(PQ)$  ne sont pas parallèles : elles sont sécantes. Une autre réponse est possible : on constate que le système suivant n'admet qu'une seule solution si  $\sin(\theta) \neq 0$ .

$H(x, y) \in \Delta_A \cap (PQ) \iff \begin{cases} x = \frac{1}{a} \\ \cos(\theta)x + \sin(\theta)y = a \cos(\theta) \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{a} \\ y = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \left( a - \frac{1}{a} \right) = \frac{\cos(\theta)(a^2 - 1)}{a \sin(\theta)} \end{cases}$

Les droites  $\Delta_A$  et  $(PQ)$  sont sécantes au point  $H \left( \frac{1}{a}, \frac{\cos(\theta)(a^2 - 1)}{a \sin(\theta)} \right)$

(c) le vecteur  $\overrightarrow{CA}(a + \cos(\theta), \sin(\theta))$  est un vecteur normal à  $\Delta_B$ , et cette droite passe par  $B$  :  
on a donc  $M(x, y) \in \Delta_B \iff (a + \cos(\theta))(x - \cos(\theta)) + \sin(\theta)(y - \sin(\theta)) = 0$

$$\boxed{\text{Une équation cartésienne de } \Delta_B \text{ est : } (a + \cos(\theta))x + \sin(\theta)y = a \cos(\theta) + 1}$$

(d) Vérifions que  $H$  appartient à  $\Delta_B$  :

$$(a + \cos(\theta))x_H + \sin(\theta)y_H = (a + \cos(\theta))\frac{1}{a} + \sin(\theta)\frac{\cos(\theta)(a^2-1)}{a \sin(\theta)} = 1 + \frac{\cos(\theta)}{a} + a \cos(\theta) - \frac{\cos(\theta)}{a} = a \cos(\theta) + 1.$$

Donc  $H \in \Delta_A \cap \Delta_B$  : c'est l'orthocentre du triangle  $ABC$ . D'après le 2.(b),  $H \in (PQ)$ .

$$\boxed{\text{Les points } P, Q \text{ et l'orthocentre du triangle } ABC \text{ sont alignés.}}$$

3. (a) La droite  $(AC)$  est de vecteur normal  $\vec{n}(-\sin(\theta), \cos(\theta) + a)$  et passe par  $A(a, 0)$ .

On en déduit une équation cartésienne de  $(AC)$  :  $-\sin(\theta)x + (a + \cos(\theta))y = -a \sin(\theta)$

$$R(x, y) \in (AC) \cap (\Delta_B) \iff \begin{cases} -\sin(\theta)x + (a + \cos(\theta))y = -a \sin(\theta) \\ (a + \cos(\theta))x + \sin(\theta)y = a \cos(\theta) + 1 \end{cases}$$

avec  $\sin(\theta) \neq 0$

$$\iff \begin{cases} -\sin(\theta)x + (a + \cos(\theta))y = -a \sin(\theta) \\ \ell_2 \leftarrow \sin(\theta)\ell_2 \quad \begin{cases} (\sin(\theta)^2 + (a + \cos(\theta))^2)y = (a \cos(\theta) + 1) \sin(\theta) + (a + \cos(\theta))(-a \sin(\theta)) \\ + (a + \cos(\theta))\ell_1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -\sin(\theta)x + (a + \cos(\theta))y = -a \sin(\theta) \\ y = \frac{(1-a^2)\sin(\theta)}{a^2+2a\cos(\theta)+1} \end{cases} \quad \text{et en simplifiant } \ell_1 \text{ par } \sin(\theta) \neq 0$$

$$\iff \begin{cases} -x + \frac{(a+\cos(\theta))(1-a^2)}{a^2+2a\cos(\theta)+1} = -a \\ y = \frac{(1-a^2)\sin(\theta)}{a^2+2a\cos(\theta)+1} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{a^2\cos(\theta)+2a+\cos(\theta)}{a^2+2a\cos(\theta)+1} \\ y = \frac{(1-a^2)\sin(\theta)}{a^2+2a\cos(\theta)+1} \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Les coordonnées du point } R, \text{ pied de la hauteur } \Delta_B \text{ sont } \left( \frac{a^2\cos(\theta)+2a+\cos(\theta)}{a^2+2a\cos(\theta)+1}, \frac{(1-a^2)\sin(\theta)}{a^2+2a\cos(\theta)+1} \right)}$$

(b) On peut vérifier que les coordonnées de  $R$  sont telles que  $x_R^2 + y_R^2 = 1$ .

Il est plus simple de remarquer que  $\overrightarrow{RB} \perp \overrightarrow{RC}$  ce qui prouve que  $R$  appartient au cercle de diamètre  $[BC]$  (qui est  $\mathcal{C}$ )

Donc  $\boxed{\text{Le point } R \text{ appartient au cercle } \mathcal{C}}$

## Exercice 2

1.  $(E_1)$  :  $y'' + 4y = \sin(\omega t)$  est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

On résout l'équation homogène  $(H_1)$  :  $y'' + 4y = 0$ .

l'équation caractéristique associée est :  $(K_1)$  :  $r^2 + 4 = 0$ , dont les racines sont  $r = \pm 2i$ .

on en déduit que les solutions de  $(H_1)$  sont les fonctions  $y_H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $t \mapsto C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t)$  où  $C_1$  et  $C_2$  sont deux constantes réelles.

Pour la recherche d'une solution particulière de  $(E_1)$ , il suffit de prendre la partie imaginaire d'une solution particulière de  $(EC_1)$  :  $y'' + 4y = e^{i\omega t}$

Le second membre de  $(EC_1)$  est de la forme  $e^{i\omega t} = P(t)e^{mt}$ , où  $P$  est un polynôme de degré 0 et  $m = i\omega$ . On sait qu'il existe une solution particulière de  $(EC_1)$  de la forme  $y_P : t \mapsto Q(t)e^{i\omega t}$ .

• *Premier cas* :  $\omega \in \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

$m = i\omega$  n'est pas racine de l'équation caractéristique. Il suffit de choisir  $\deg(Q) = \deg(P)$ .

on pose donc  $y_p(t) = ke^{i\omega t}$  avec  $k \in \mathbb{C}$ .

Ceci donne alors  $y_p'(t) = i\omega ke^{i\omega t}$  et  $y_p''(t) = -\omega^2 ke^{i\omega t}$ .

Dans ces conditions,  $y_p$  est solution de  $(EC_1) \iff \forall t \in \mathbb{R}, (4 - \omega^2)ke^{i\omega t} = e^{i\omega t} \iff k = \frac{1}{4 - \omega^2}$

On obtient  $y_p(t) = \frac{1}{4 - \omega^2}e^{i\omega t}$ , ce qui nous donne  $\text{Im}(y_p(t)) = \frac{\sin(\omega t)}{4 - \omega^2}$  comme solution particulière de  $(E_1)$ .

L'ensemble des solutions de  $(E_1)$  est donc

$$S_1 = \left\{ y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} ; t \mapsto \frac{\sin(\omega t)}{4 - \omega^2} + C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) / (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

- *Deuxième cas* :  $\omega = 2$

$m = 2i$  est racine simple de l'équation caractéristique. Il suffit de choisir  $\deg(Q) = \deg(P) + 1$  et de poser  $y_p(t) = kte^{2it}$  avec  $k \in \mathbb{C}$ .

Ceci donne alors  $y_p'(t) = (2ikt + k)e^{2it}$  et  $y_p''(t) = (-4kt + 4ik)e^{2it}$ .

Dans ces conditions,  $y_p$  est solution de  $(EC_1) \iff \forall t \in \mathbb{R}, 4ike^{2it} = e^{2it} \iff k = \frac{1}{4i} = -\frac{i}{4}$   
On obtient  $y_p(t) = -\frac{it}{4}e^{2it}$ , ce qui nous donne  $Im(y_p(t)) = -\frac{t \cos(2t)}{4}$  comme solution particulière de  $(E_1)$ .

L'ensemble des solutions de  $(E_1)$  est donc

$$S_1 = \left\{ y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} ; t \mapsto \left(\frac{-t}{4} + C_1\right) \cos(2t) + C_2 \sin(2t) / (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

- *Troisième cas* :  $\omega = -1$

On peut faire un calcul similaire au deuxième cas, ou observer que si  $g : t \mapsto -\frac{t \cos(2t)}{4}$  vérifie  $\forall t \in \mathbb{R}, g''(t) + 4g(t) = \sin(2t)$ , alors la fonction opposée  $-g : t \mapsto \frac{t \cos(2t)}{4}$  sera telle que  $\forall t \in \mathbb{R}, (-g)''(t) + 4(-g)(t) = -\sin(2t) = \sin(-2t)$ . L'ensemble des solutions de  $(E_1)$  est donc

$$S_1 = \left\{ y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} ; t \mapsto \left(\frac{t}{4} + C_1\right) \cos(2t) + C_2 \sin(2t) / (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

2.  $(E_2) : y'' - (1+a)y' + ay = e^x$  est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

On résout l'équation homogène  $(H_2) : y'' - (1+a)y' + ay = 0$ .

l'équation caractéristique associée est :  $(K_2) : r^2 - (1+a)r + a = 0$ , dont les racines sont  $r_1 = 1$  et  $r_2 = a$ .

- si  $a \neq 1$  alors les solutions de  $(H_2)$  sont les fonctions  $y_H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} ; x \mapsto C_1 e^x + C_2 e^{ax}$  où  $C_1$  et  $C_2$  sont deux constantes réelles.
- si  $a = 1$  alors les solutions de  $(H_2)$  sont les fonctions  $y_H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} ; x \mapsto (C_1 x + C_2) e^x$  où  $C_1$  et  $C_2$  sont deux constantes réelles.

Le second membre de  $(E_2)$  est de la forme  $e^x = P(x)e^{mx}$ , où  $P$  est un polynôme de degré 0 et  $m = 1$ . On sait qu'il existe une solution particulière de  $(E_2)$  de la forme  $y_p : x \mapsto Q(x)e^x$ .

- *Premier cas* :  $a \neq 1$

$m = 1$  est racine simple de l'équation caractéristique. Il suffit de choisir  $\deg(Q) = \deg(P) + 1$  et de poser  $y_p(x) = kxe^x$  avec  $k \in \mathbb{R}$ .

Ceci donne alors  $y_p'(t) = (kx + k)e^x$  et  $y_p''(t) = (kx + 2k)e^x$ .

Alors,  $y_p$  est solution de  $(E_2) \iff \forall x \in \mathbb{R}, ((kx + 2k) - (1+a)(kx + k) + akx) e^x = e^x$   
 $\iff k(1-a) = 1 \iff k = \frac{1}{1-a}$

On obtient  $y_p(x) = \frac{x}{1-a} e^x$  comme solution particulière et l'ensemble des solutions de  $(E_2)$  est

$$S_2 = \left\{ y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} ; x \mapsto \left(\frac{x}{1-a} + C_1\right) e^x + C_2 e^{ax} / (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

- *Deuxième cas* :  $a = 1$

$m = 1$  est racine double de l'équation caractéristique. Il suffit de choisir  $\deg(Q) = \deg(P) + 2$  et de poser  $y_p(x) = kx^2 e^x$  avec  $k \in \mathbb{R}$ .

Ceci donne alors  $y_p'(t) = (kx^2 + 2kx)e^x$  et  $y_p''(t) = (kx^2 + 4kx + 2k)e^x$ .

$y_p$  est solution de  $(E_2) \iff \forall x \in \mathbb{R}, ((kx^2 + 4kx + 2k) - 2(kx^2 + 2kx) + kx^2) e^x = e^x$   
 $\iff 2k = 1 \iff k = \frac{1}{2}$

On obtient  $y_p(x) = \frac{x^2}{2} e^x$  comme solution particulière et l'ensemble des solutions de  $(E_2)$  est

$$\mathcal{S}_2 = \left\{ y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} ; x \mapsto \left( \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2 \right) e^x / (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

### Exercice 3

1. On cherche  $a$  et  $b$  tels que :

$$\forall x \in I, \quad \frac{3x+1-m}{x^2-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} \iff \forall x \in I, \quad \frac{3x+1-m}{x^2-1} = \frac{(a+b)x+a-b}{(x-1)(x+1)}.$$

Comme  $x \neq 1$  et  $x \neq -1$ , on a

$$\iff \forall x \in I, \quad 3x + (1-m) = (a+b)x + a - b.$$

Les deux membres de l'égalité sont des fonctions polynomiales de degré 1 en  $x$ . Ces deux fonctions polynômes sont égales car elles sont égales pour tout  $x$  sur un intervalle non vide de  $\mathbb{R}$ . Alors leurs coefficients sont égaux :

$$\iff \begin{cases} a+b = 3 \\ a-b = 1-m \end{cases} \iff \begin{cases} 2a = 4-m \\ 2b = 2+m \end{cases}$$

On trouve  $a = 2 - \frac{m}{2}$  et  $b = 1 + \frac{m}{2}$ .

Si bien que

$$\forall x \in I, \quad \frac{3x+1-m}{x^2-1} = \frac{2-\frac{m}{2}}{x-1} + \frac{1+\frac{m}{2}}{x+1}$$

2. L'équation  $(E_m)$  est une équation différentielle linéaire homogène. Pour  $x \in I$ , on a  $1-x^2 \neq 0$  : on peut la réécrire :

$$y'(x) = \frac{3x+1-m}{x^2-1} y(x).$$

Une primitive de l'application  $u : x \mapsto \frac{3x+1-m}{x^2-1} = \frac{2-\frac{m}{2}}{x-1} + \frac{1+\frac{m}{2}}{x+1}$  est l'application  $U : x \mapsto (2 - \frac{m}{2}) \ln|x-1| + (1 + \frac{m}{2}) \ln|x+1| + cste$

on remarque que, pour  $x$  dans l'intervalle  $I$ , on a  $\ln|x-1| = \ln(1-x)$  et  $\ln|x+1| = \ln(x+1)$

Alors les solutions de l'équation sont :

$$y(x) = C \exp \left( (2 - \frac{m}{2}) \ln(1-x) + (1 + \frac{m}{2}) \ln(x+1) \right) = C (1-x)^{2-\frac{m}{2}} (x+1)^{1+\frac{m}{2}} \text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$

L'ensemble des solutions est :

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ \begin{array}{l} ]-1, 1[ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto C (1-x)^{2-\frac{m}{2}} (x+1)^{1+\frac{m}{2}} \end{array} \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$$

3. • Si  $m = -2$ , alors les solutions sont  $y(x) = C(1-x)^3$  avec  $C \in \mathbb{R}$ , qui sont des polynômes.
- Si  $m = 0$ , alors les solutions sont  $y(x) = C(1-x)^2(x+1)$  avec  $C \in \mathbb{R}$ , qui sont des polynômes.
- Si  $m = 2$ , alors les solutions sont  $y(x) = C(1-x)(x+1)^2$  avec  $C \in \mathbb{R}$ , qui sont des polynômes.
- Si  $m = 4$ , alors les solutions sont  $y(x) = C(x+1)^3$  avec  $C \in \mathbb{R}$ , qui sont des polynômes.

4. (a) On cherche une solution polynomiale de degré 1 :  $f_p(x) = \alpha x + \beta$  qui donne  $f_p'(x) = \alpha$ .

On remplace cette expression dans l'équation :

$$(1-x^2)\alpha + 3(x+1)(\alpha x + \beta) = 1-x^2 \text{ pour tout } x \in I.$$

$$\iff (\alpha + 3\beta) + (3\alpha + 3\beta)x + (2\alpha)x^2 = 1-x^2 \text{ pour tout } x \in I.$$

On en déduit que les coefficients de même degré sont égaux :

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta = 1 \\ 3\alpha + 3\beta = 0 \\ 2\alpha = -1 \end{cases} \iff \alpha = -\frac{1}{2} \text{ et } \beta = \frac{1}{2}.$$

$$\text{La fonction } x \mapsto \frac{1}{2}(1-x) \text{ est une solution de } (ES_{-2})$$

- (b) L'ensemble des solutions de l'équation avec second membre ( $ES_{-2}$ ) est somme de la solution trouvée à la question précédente et de l'ensemble des solutions de l'équation homogène déterminé à la question 3.

L'ensemble des solutions est :

$$S = \left\{ \begin{array}{l} ]-1, 1[ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{2}(1-x) + C(1-x)^3 \end{array} \middle| C \in \mathbb{R} \right\}.$$

5. (a) On réduit l'égalité au même dénominateur :

$$\forall x \in I, \frac{1}{1-x^2} = \frac{\alpha}{1-x} + \frac{\beta}{1+x} \iff \forall x \in I, \frac{1}{1-x^2} = \frac{(\alpha-\beta)x + \alpha + \beta}{1-x^2}$$

$$\iff \forall x \in I, (\alpha-\beta)x + \alpha + \beta = 1.$$

Deux fonctions polynomiales sont égales si et seulement si leurs coefficients de même degré sont égaux :

$$\iff \begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ \alpha + \beta = 1 \end{cases} \iff \alpha = \frac{1}{2} \text{ et } \beta = \frac{1}{2}.$$

$$\forall x \in I, \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)}$$

- (b) On cherche une solution sous la forme  $f_p(x) = \lambda(x)(1+x)^3$  car  $x \mapsto (1+x)^3$  est solution de l'équation homogène.

On obtient  $f_p'(x) = \lambda'(x)(1+x)^3 + 3\lambda(x)(1+x)^2$

Alors

$$(1-x^2)f_p'(x) + 3(x-1)f_p(x) = \lambda'(x)(1-x^2)(1+x)^3 + \lambda(x)(3(1-x^2)(1+x)^2 + 3(x-1)(1+x)^3)$$

qui donne  $(1-x^2)f_p'(x) + 3(x-1)f_p(x) = \lambda'(x)(1-x^2)(1+x)^3$ .

$$\text{On cherche donc } \lambda'(x) = \frac{(x+1)^3}{(1-x^2)(1+x)^3} = \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)}$$

On en déduit que

$$\lambda(x) = -\frac{1}{2} \ln(1-x) + \frac{1}{2} \ln(1+x) + C \text{ avec } C \in \mathbb{R} \text{ car } 1-x > 0 \text{ et } 1+x > 0.$$

$$\text{Soit } \lambda(x) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C \text{ et } f_p(x) = \left( \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C \right) (1+x)^3$$

$$\text{que l'on peut aussi écrire : } f_p(x) = (\operatorname{argth}(x) + C)(1+x)^3$$

L'ensemble des solutions de ( $ES_4$ ) est :

$$S = \left\{ \begin{array}{l} ]-1, 1[ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \left( \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C \right) (1+x)^3 \end{array} \middle| C \in \mathbb{R} \right\}.$$

## Exercice 4

1. On met sous forme canonique l'équation de la sphère  $S$  :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 1 = 0 \iff (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-0)^2 = 4 = 2^2.$$

Alors la sphère  $S$  est la sphère de centre  $\Omega(2, 1, 0)$  et de rayon  $R = 2$ .

2. On résout le système d'équations cartésiennes de  $\mathcal{D}$  pour trouver une représentation paramétrique :

$$\begin{cases} 2y - x = 0 \\ z + 2y = x + 2 \end{cases} \iff \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ -x + 2y + z = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2y \\ z = 2 \end{cases}$$

On paramètre l'ensemble des solutions en posant  $y = \alpha \in \mathbb{R}$  et on trouve :

$$\begin{cases} x = 2\alpha \\ y = \alpha \\ z = 2 \end{cases} \text{ représentation paramétrique de } \mathcal{D}.$$

$\mathcal{D}$  passe par  $A(0, 0, 2)$  et est dirigée par  $\vec{u}(2, 1, 0)$ .

On calcule la distance du centre  $\Omega$  de la sphère à la droite  $\mathcal{D}$  :

$$d(\Omega, \mathcal{D}) = \frac{\|\overrightarrow{A\Omega} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}.$$

On a  $\overrightarrow{A\Omega}(2, 1, -2)$  et  $\overrightarrow{A\Omega} \wedge \vec{u}$  est de coordonnées  $(2, 1, -2) \wedge (2, 1, 0) = (2, -4, 0)$  d'où

$$d(\Omega, \mathcal{D}) = \frac{\sqrt{4+16}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 2.$$

On trouve que la distance de  $\Omega$  à la droite  $\mathcal{D}$  est égale au rayon de la sphère  $S$ , alors

la droite  $\mathcal{D}$  est tangente à la sphère  $S$ .

3. Le point d'intersection  $K$  de  $\mathcal{D}$  avec  $S$  est l'intersection de  $\mathcal{D}$  avec le plan perpendiculaire à  $\mathcal{D}$  passant par le centre  $\Omega$  de la sphère.

Ce plan  $Q$  a pour équation :  $2x + y + 0z + d = 0$  car  $\vec{u}(2, 1, 0)$  qui dirige  $\mathcal{D}$  est normal à  $Q$ .

Comme  $\Omega \in Q$ , on trouve  $d = -5$  :

$$Q : 2x + y - 5 = 0.$$

On résout le système  $\mathcal{D} \cap Q$  :

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ -x + 2y = 0 \\ -x + 2y + z = 2 \end{cases}$$

Les deux premières équations donnent  $x = 2$  et  $y = 1$ . Puis, on trouve  $z = 2$ .

Le point d'intersection de  $\mathcal{D}$  avec  $S$  est  $K = (2, 1, 2)$ .

4. Pour étudier l'intersection de  $S$  et  $\Pi$  on calcule la distance de  $\Omega$  centre de  $S$  à  $\Pi$  :

$$d(\Omega, \Pi) = \frac{|2 + 1 + 0|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

On a  $d(\Omega, \Pi) < R$  alors l'intersection de la sphère et du plan est un cercle.

On détermine le centre  $H$  de ce cercle qui est le projeté orthogonal de  $\Omega$  sur  $\Pi$  :  $H \in \Pi$  et  $\overrightarrow{\Omega H}$  est orthogonal à  $\Pi$ . On note  $H(x, y, z)$  et  $\vec{n}(1, 1, 1)$  un vecteur normal à  $\Pi$ .

On a  $\overrightarrow{\Omega H} = \lambda \vec{n}$  ce qui donne  $H(2 + \lambda, 1 + \lambda, \lambda)$ .

On utilise l'équation de  $\Pi$  qui donne  $3 + 3\lambda = 0 \iff \lambda = -1$ .

On en déduit que  $H(1, 0, -1)$ .

Pour déterminer le rayon  $r$  du cercle, on considère un point  $M$  sur ce cercle. Alors le triangle  $MH\Omega$  est rectangle en  $H$  et  $r = MH$ ,  $R = M\Omega$  et  $\Omega H = d(\Omega, \Pi) = \sqrt{3}$ . Le théorème de Pythagore donne alors  $r = \sqrt{R^2 - d(\Omega, \Pi)^2} = \sqrt{4 - 3} = 1$ .

L'intersection de  $S$  et  $\Pi$  est un cercle de centre  $H(1, 0, -1)$  de rayon  $r = 1$  et d'axe  $H + \mathbb{R}(1, 1, 1)$ .

5. On détermine un vecteur directeur de  $\mathcal{D}'$  par un produit vectoriel :

$$\vec{u}' : \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et on a pour } \mathcal{D}, \vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tout plan parallèle à  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  est dirigé par  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'$  donc il a pour vecteur normal  $\vec{u} \wedge \vec{u}'$  de coordonnées  $(1, -2, 3)$ .

Alors tout plan  $\mathcal{P}$  parallèle à  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  a pour équation  $\mathcal{P} : x - 2y + 3z + d = 0$ .

$\mathcal{P}$  est tangent à  $\mathcal{S}$  si et seulement si  $d(\Omega, \mathcal{P}) = R \iff \frac{|1 \cdot (2) - 2(1) + 3(0) + d|}{\sqrt{14}} = 2 \iff d = 2\sqrt{14}$  ou  $d = -2\sqrt{14}$

Les plans tangents à  $\mathcal{S}$  et parallèles à  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  sont les deux plans :

$$\mathcal{P}_1 : x - 2y + 3z + 2\sqrt{14} = 0 \text{ et } \mathcal{P}_2 : x - 2y + 3z - 2\sqrt{14} = 0$$