Devoir libre n°6

Exercice 1 :

Soit Γ la courbe de représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & 2t+t^2 \\ y(t) & = & 2t-\frac{2}{t} \end{array}\right.$

1. Préciser les domaines de définition de x et y ainsi que l'intervalle d'étude de Γ.
2. Dresser un tableau de variation pour x et y.
3. Etudier les branches infinies de Γ.
4. Déterminer le(s) point(s) où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y=x$.
5. Représenter Γ.
6. Le tracé précédent nous permet de déterminer l'existence d'un point double, c'est à dire un point où la courbe se croise. Il existe donc $(s,u)\in\mathbb{R}^2$ tels que $M(s)=M(u)$.
   (a) Justifier que l'on peut choisir $s<-1$ et $u>0$.
   (b) Montrer que $\left\{\begin{array}{rcl} u+s & = & -2 \\ us & = & -1 \end{array}\right.$.
   (c) En déduire les valeurs de u et s, et les coordonnées du point double. Le placer sur la courbe et préciser les tangentes en ce point.

Exercice 2 : Lemniscate de Bernoulli

Le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$. Pour $\theta\in\mathbb{R}$, on note $\overrightarrow{u}_\theta=\cos\theta\overrightarrow{i}+\sin\theta\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v}_\theta=\overrightarrow{u}_{\theta+\frac{\pi}{2}}$
On étudie le lieu Γ formé des points M du plan tels que $MF.MF'=1$ avec $F(1,0)$ et $F'(-1,0)$.

1. (a) Justifier que Γ est symétrique par rapport aux axes (Ox) et (Oy) .
   (b) Déterminer l'intersection de Γ avec les axes (Ox) et (Oy) .
   (c) Déterminer un réel R tel que la courbe Γ soit incluse dans le disque de centre O et de rayon R .
2. Soit M un point du plan dont (ρ,θ) est un système de coordonnées polaires.
   (a) Exprimer MF^2 et de même MF'^2 en fonction de ρ et θ .
   (b) Justifier que $M\in\Gamma \iff \rho^4=2\rho^2\cos 2\theta$.
   (c) En déduire que $\rho=\sqrt{2\cos 2\theta}$ est une équation polaire de Γ .
3. On note $M(\theta)$ le point courant de l'arc d'équation polaire $\rho=\sqrt{2\cos 2\theta}$
   (a) Préciser le domaine de definition de l'application $\rho:\theta\longmapsto\rho(\theta)$.
   Comparer $M(\theta)$ et $M(\theta+\pi)$ d'une part, $M(\theta)$ et $M(-\theta)$ d'autre part.
   (b) Dresser le tableau de variation de l'application $\rho:\theta\longmapsto\rho(\theta)$ sur $[0,\frac{\pi}{4}]$.
   (c) Préciser l'allure de Γ au voisinage des points de paramètres $\theta=0$ et $\theta=\frac{\pi}{4}$ en y figurant le sens de parcours des θ croissants.
   (d) Pour quels $\theta\in[0,\frac{\pi}{4}]$, la courbe admet-elle en $M(\theta)$ une tangente horizontale ?
   (e) Représenter Γ en prenant une unite égale a 4cm.
4. On note $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ les cercles de centres F, F' et de rayon $\sqrt{2}$.
   (a) Soit $A(\theta)$ et $B(\theta)$ les points determines par $\overrightarrow{M(\theta)A(\theta)}=\overrightarrow{u}_{2\theta}$ et $\overrightarrow{M(\theta)B(\theta)}=-\overrightarrow{u}_{2\theta}$ de sorte qu'on ait, entre autres, $A(\theta)B(\theta)=2$ et $M(\theta)=m[A(\theta),B(\theta)]$. Montrer que $A(\theta)\in\mathcal{C}$.
   On justifie, par des calculs semblables mais non demandés, que $B(\theta)\in\mathcal{C}'$.
   (b) Préciser la portion de $\mathcal{C}$ décrite par le point $A(\theta)$ pour $\theta\in]0,\frac{\pi}{4}[$.
   (c) Deduire de ce qui précède comment construire les points de paramètres $M(\theta)$ (avec $\theta\in]0,\frac{\pi}{4}[$).