

## Devoir surveillé n°3

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices ou de téléphones portables est interdit.

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.*

### Exercice 1

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormal  $(0, \vec{i}, \vec{j})$ .

Les résultats demandés sont à exprimer en fonction de deux réels  $a$  et  $\theta$  tels que  $a > 1$  et  $\theta \neq 0 \pmod{\pi}$ .

Soit les points  $A(a, 0)$ ,  $B(\cos(\theta), \sin(\theta))$  et  $C(-\cos(\theta), -\sin(\theta))$  et le cercle  $\mathcal{C}$  d'équation  $x^2 + y^2 = 1$ .

On note  $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$  les tangentes au cercle  $\mathcal{C}$  issues de  $A$  et  $P, Q$  les points de contact de ces tangentes avec le cercle  $\mathcal{C}$ .

1. (a) Déterminer une équation du cercle de diamètre  $[OA]$ .  
 (b) En déduire les coordonnées de  $P$  et  $Q$ .  
 (c) Trouver une équation cartésienne de la droite  $(PQ)$ .
2. (a) Déterminer une équation cartésienne de  $\Delta_A$ , la hauteur du triangle  $ABC$  issue de  $A$ .  
 (b) Vérifier que les droites  $\Delta_A$  et  $(PQ)$  sont sécantes et déterminer les coordonnées du point d'intersection  $H = \Delta_A \cap (PQ)$ .  
 (c) Déterminer une équation cartésienne de  $\Delta_B$ , la hauteur du triangle  $ABC$  issue de  $B$ .  
 (d) Démontrer le résultat suivant : les points  $P, Q$  et l'orthocentre du triangle  $ABC$  sont alignés.
3. (a) Trouver les coordonnées du point  $R$ , pied de la hauteur issue de  $B$ .  
 (b) Montrer que le point  $R$  appartient au cercle  $\mathcal{C}$ .

### Exercice 2

1. Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle

$$y'' + 4y = \sin(\omega t)$$

en fonction du paramètre  $\omega \in \mathbb{R}$ .

2. Soit  $a$  un paramètre réel, résoudre, en fonction de  $a$  l'équation différentielle

$$y'' - (1 + a)y' + ay = e^x$$

### Exercice 3

Soit  $m$  un réel donné et soit  $I$  l'intervalle  $] -1, 1[$ . On considère l'équation différentielle  $(E_m)$  :

$$(1 - x^2)y'(x) + (3x + 1 - m)y(x) = 0.$$

1. Déterminer des réels  $a$  et  $b$  dépendants de  $m$  tels que :

$$\forall x \in I, \quad \frac{3x + 1 - m}{x^2 - 1} = \frac{a}{x - 1} + \frac{b}{x + 1}.$$

2. Résoudre l'équation  $(E_m)$  sur  $I$  pour tout réel  $m$ .
3. Vérifier que si  $m \in \{-2, 0, 2, 4\}$  alors les solutions de  $(E_m)$  sont des polynômes. Préciser les solutions correspondantes.
4. On prend  $m = -2$  dans cette question et on considère l'équation  $(ES_{-2})$  suivante :

$$(1 - x^2)y'(x) + (3x + 3)y(x) = 1 - x^2 \quad (ES_{-2}).$$

- (a) Déterminer une solution polynômiale de degré 1 de l'équation  $(ES_{-2})$ .
- (b) En déduire l'ensemble des solutions sur  $I$  de  $(ES_{-2})$ .

5. On prend  $m = 4$  dans cette question.

(a) Déterminer des réels  $\alpha$  et  $\beta$ , tels que  $\forall x \in I, \quad \frac{1}{1 - x^2} = \frac{\alpha}{1 - x} + \frac{\beta}{1 + x}$

- (b) A l'aide de la méthode de la variation de la constante, résoudre sur  $I$  l'équation

$$(1 - x^2)y'(x) + (3x - 3)y(x) = (x + 1)^3 \quad (ES_4).$$

### Exercice 4

L'espace est rapporté à un repère orthonormal  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On considère la sphère  $\mathcal{S}$  d'équation  $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 1 = 0$ , le plan  $\Pi : x + y + z = 0$  et les droites  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  d'équations :

$$\mathcal{D} : \begin{cases} 2y - x = 0 \\ z + 2y = x + 2 \end{cases} \quad \mathcal{D}' : \begin{cases} x - y + z + 3 = 0 \\ 2x - y + 5 = 0 \end{cases}$$

- Déterminer le centre  $\Omega$  et le rayon  $R$  de la sphère  $\mathcal{S}$ .
- Donner une représentation paramétrique de  $\mathcal{D}$  et prouver que  $\mathcal{D}$  est tangente à  $\mathcal{S}$ .
- Préciser les coordonnées du point d'intersection de  $\mathcal{D}$  avec  $\mathcal{S}$ .
- Préciser la nature géométrique et les éléments caractéristiques de  $\mathcal{S} \cap \Pi$ .
- Déterminer le (ou les) plan(s) tangent(s) à la sphère  $\mathcal{S}$  parallèle(s) à la fois à  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$ .