1. Soit A, B, C trois points non alignés du plan $\mathcal{P}$.
   (a) Par la relation de Chasles, pour tout point M de $\mathcal{P}$ on a :
   $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}).\overrightarrow{CM}+(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC}).\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AM}.(\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MC})=0$
   Donc, pour tout point M de $\mathcal{P}$ on a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{AC}\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AM}\overrightarrow{BC}=0$
   (b) *En déduire que les hauteurs du triangle ABC sont concourantes.*
   A, B, C sont trois points non alignés du plan $\mathcal{P}$, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont non colinéaires. Il s'en suit que les hauteurs issues de C et de B sont sécantes : appelons H leur point d'intersection.
   On a $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CH}+\overrightarrow{AC}\overrightarrow{HB}=0$, et , d'après le (a), cela implique que $\overrightarrow{AH}\overrightarrow{BC}=0$.
   Donc, le point H appartient à la hauteur issue de A.
   Donc les hauteurs du triangle ABC sont concourantes.
2. *Dans le plan on considère un triangle ABC, son centre de gravité G, un point P sur le côté (BC) distinct de B et C. On pose $k=\dfrac{\overline{PC}}{\overline{PB}}$ et on considère le barycentre Q de $\{(A,1),(C,-k)\}$ et le barycentre R de $\{(B,1),(A,-k)\}$. Vérifier que PQR est un triangle de centre de gravité G. En déduire une construction de Q, R.*
   On a donc $\overrightarrow{PC}=k\overrightarrow{PB}$ mais aussi $\overrightarrow{QA}=k\overrightarrow{QC}$ et $\overrightarrow{RB}=k\overrightarrow{RA}$.
   $\overrightarrow{PG}+\overrightarrow{GC}=k\overrightarrow{PG}+k\overrightarrow{GB}$ mais aussi $\overrightarrow{QG}+\overrightarrow{GA}=k\overrightarrow{QG}+k\overrightarrow{GC}$ et $\overrightarrow{RG}+\overrightarrow{GB}=k\overrightarrow{RG}+k\overrightarrow{GA}$
   En ajoutant membre à membre ces égalités et, sachant que $\overrightarrow{0}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$, on en déduit que
   $\overrightarrow{PG}+\overrightarrow{QG}+\overrightarrow{RG}=k(\overrightarrow{PG}+\overrightarrow{QG}+\overrightarrow{RG})$.
   mais alors, ayant $k\neq 1$ (comme $C\neq B$), on en déduit que $\overrightarrow{PG}+\overrightarrow{QG}+\overrightarrow{RG}=\overrightarrow{0}$
   Donc G est l'isobarycentre de P, Q, R
   une construction possible :
   A partir de G et de P, on construit le milieu K de $[QR]$ qui est tel que $\overrightarrow{GK}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{GP}$.
   on sait que l'image de $R\in(AB)$ par la symétrie centrale de centre K est $Q\in(AC)$ (et réciproquement). Il suffit donc de tracer l'image de la droite (AB) par la symétrie centrale de centre K (c'est une droite qui lui est parallèle) : elle rencontre la droite (AC) en un point qui est Q.
   Ayant Q, on récupère R avec $\overrightarrow{KR}=-\overrightarrow{KQ}$
3. *Dans un plan on considère un triangle ABC, puis les points E, F, M barycentres des points A, B, C affectés des coefficients $(1,2,-2)$, $(1,-1,-1)$, (α,β,γ). Démontrer que $M\in(EF)$ si et seulement si $4\alpha+\beta+3\gamma=0$.*
   E est barycentre de A, B, C affectés des coefficients $(1,2,-2)$: donc $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{1}(2\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC})=2\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$
   F est barycentre de A, B, C affectés des coefficients $(1,-1,-1)$: donc $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{-1}(-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$
   Donc le vecteur $\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$ est de coordonnées $X=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ dans la base $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$
   M est barycentre de A, B, C affectés des coefficients (α,β,γ) : donc $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{\alpha+\beta+\gamma}(\beta\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AC})$
   Donc $\overrightarrow{FM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AF}=\dfrac{1}{\alpha+\beta+\gamma}(\beta\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AC})-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\dfrac{-\alpha-\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}+\dfrac{-\alpha-\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$
   Le vecteur $\overrightarrow{FM}$ est de coordonnées $Y=\begin{pmatrix}\frac{-\alpha-\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\\ \frac{-\alpha-\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\end{pmatrix}$ dans la base $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.
   $M\in(EF)\iff\overrightarrow{FM}$ et $\overrightarrow{FE}$ sont colinéaires $\iff X$ et Y sont proportionnels $\iff Det(X,Y)=0\iff 4\alpha+\beta+3\gamma=0$.
4. *Le plan étant rapporté à un repère orthonormal, on considère les points $A(-1,1)$, $B(3,-1)$ $C(1,4)$.*
   (a) *Déterminer les coordonnées du point H projeté orthogonal de C sur la droite (AB).*
   La droite (AB) est de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}(4,-2)$, de vecteur normal $(1,2)$ et d'équation cartésienne $x+2y-1=0$.
   la droite orthogonale à (AB) passant par $C(1,4)$ est d'équation $2x-y+2=0$.
   On résout le système pour déterminer l'intersection de ces deux droites et, on trouve le point $H_C(-3/5,4/5)$
   (b) *Ecrire les équations des hauteurs du triangle (ABC) et vérifier qu'elles sont concourantes*
   Hauteur issue de A : de vecteur normal $\overrightarrow{BC}(-2,5)$ et d'équation $-2x+5y-7=0$
   Hauteur issue de B : de vecteur normal $\overrightarrow{AC}(2,3)$ et d'équation $2x+3y-3=0$
   Hauteur issue de C : de vecteur normal $\overrightarrow{AB}(4,-2)$ et d'équation $2x-y+2=0$
   Ces droites sont concourantes en $H(-3/8,5/4)$, orthocentre du triangle.
5. *Dans le plan rapporté à un repère orthonormal, on considère les point A, B et C de coordonnées respectives $(-1,0)$, $(2,4)$ et $(3,3)$.*
   (a) *Calculer l'aire du triangle ABC. En déduire la distance de A à la droite (BC)*
   l'aire vaut $\mathcal{A}=\dfrac{|Det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})|}{2}=7/2$.
   mais on sait que ceci vaut "un demi de la base par la hauteur", et comme la base vaut $BC=||\overrightarrow{BC}||=\sqrt{2}$, on obtient que la hauteur issue de A est est de mesure $7/\sqrt{2}$: c'est aussi la distance de A à la droite (BC).

(b) *Former une équation de la droite (AB). En déduire la longueur de la hauteur issue de C et retrouver l'aire du triangle ABC.*
Un vecteur directeur de (AB) est $\overrightarrow{AB}(3,4)$, de vecteur normal $(-4,3)$, d'équation cartésienne $-4x+3y-4=0$.
Donc,la distance de C à (AB) est $d=\dfrac{|-12+9-4|}{\sqrt{25}}=\dfrac{7}{5}$ ce qui est la longueur de la hauteur issue de C.
on retrouve l'aire du triangle avec "un demi de la base par la hauteur" : $\mathcal{A}=\dfrac{1}{2}.||\overrightarrow{AB}||.\dfrac{7}{5}=\dfrac{7}{2}$

6. *Soit A le point de coordonnées $(1,-2)$. et D la droite d'équation $3x+4y-1=0$.*
(a) *Calculer la distance de A à D.*
$d=\dfrac{|3-8-1|}{\sqrt{9+16}}=\dfrac{6}{5}$
(b) *Donner un système d'équations paramétriques de la droite Δ, perpendiculaire à D et passant par A.*
C'est une droite dirigée par $\overrightarrow{n}(3,4)$ et passant par $A(1,-2)$ donc :$\begin{cases} x=1+3\lambda \\ y=-2+4\lambda \end{cases}$
(c) *En déduire les coordonnées du point H projetté orthogonal de A sur D. Retrouver la distance de A à D.*
H est sur la perpendiculaire à D passant par A et sur la droite D. Ses coordonnées vérifient $\begin{cases} x_H=1+3\lambda \\ y_H=-2+4\lambda \end{cases}$
qu'on remplace dans $3x_H+4y_H-1=0$. On en déduit que $\lambda=\dfrac{6}{25}$ et ensuite $H(43/25,-26/25)$.
$\overrightarrow{AH}=\lambda\overrightarrow{n}=6/25.\overrightarrow{n}$ et donc $AH=6/5$.

7. *Soit les point A, B et C de coordonnées respectives $(1,4)$, $(-4,2)$ et $(3,-1)$.*
Préciser la nature du triangle ABC et donner une équation cartésienne de la hauteur issue de A.
$\overrightarrow{AB}(-5,-2)\perp\overrightarrow{AC}(2,-5)$ et $AB=AC$
Ce triangle est rectangle en A et isocèle.
$\overrightarrow{BC}(7,-3)$ est un vecteur normal à la hauteur issue de A. Une équation cartésienne de cette hauteur (qui passe par A) est donc $7x-3y+5=0$

8. *On considère deux droites D_1 et D_2 sécantes en O, et deux droites Δ_1 et Δ_2 sécantes en O', et on pose :*
$\{A\}=D_1\cap\Delta_1$; , $\{B\}=D_1\cap\Delta_2$, $\{A'\}=D_2\cap\Delta_2$ *et* $\{B'\}=D_2\cap\Delta_1$. *On choisit le repère $\mathcal{R}=(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB'})$.*
(a) *Déterminer les équations de D_1 , D_2 , Δ_1 et Δ_2 dans $\mathcal{R}$. Déterminer les coordonnées de O' dans $\mathcal{R}$.*
D_1 et D_2 sont les axes du repère : $D_1\ :\ y=0$ et $D_2\ :\ x=0$.
Δ_1 passe par les points $A(1,0)$ et $B'(0,1)$: donc $\Delta_1\ :\ x+y=1$.
Δ_2 est une droite "quelconque" d'équation : $ax+by+c=0$, non parallèle aux axes , donc avec $a\neq 0$, $b\neq 0$ et non parallèle à Δ_1, donc avec $a\neq b$.
(b) *En déduire les coordonnées dans $\mathcal{R}$ de P, Q et R , milieux respectifs des segments $[A,A']$, $[B,B']$ et $[O,O']$.*
on trouve les coordonnées suivantes : $A(1,0)$, $A'(0,-\dfrac{b}{c})$, $B'(0,1)$, $B(-\dfrac{c}{a},0)$, $O'(\dfrac{b+c}{b-a},\dfrac{a+c}{a-b})$
Et, on en déduit les coordonnées des milieux $P(\dfrac{1}{2},\dfrac{-c}{2b})$, $Q(\dfrac{-c}{2a},\dfrac{1}{2})$ et $R(\dfrac{b+c}{2(b-a)},\dfrac{a+c}{2(a-b)})$.
(c) *Montrer que P , Q et R sont alignés.*
On obtient alors les coordonnées des vecteurs suivants : $\overrightarrow{PQ}(\dfrac{-c}{2a}-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}+\dfrac{c}{2b})=(\dfrac{-c-a}{2a},\dfrac{b+c}{2b})$
Et $\overrightarrow{PR}(\dfrac{b+c}{2(b-a)}-\dfrac{1}{2},\dfrac{a+c}{2(a-b)}+\dfrac{c}{2b})=(\dfrac{a+c}{2(b-a)},\dfrac{a(b+c)}{2b(b-a)})$
On constate pour conclure que $\overrightarrow{PR}=\dfrac{-a}{b-a}\overrightarrow{PQ}$ donc les points P , Q et R sont alignés.

9. *Soit A,B et C des points non alignés, et les barycentres G de $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$, G_1 de $\{(A,-\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$, G_2 de $\{(A,\alpha);(B,-\beta);(C,\gamma)\}$ et G_3 de $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,-\gamma)\}$.*
(a) Montrer que les droites (AG_1) ,(BG_2) et $CG_3)$ se coupent en G.
Par associativité, G est barycentre de $(A,2\alpha)$ et $(G_1,-\alpha+\beta+\gamma)$: donc G est sur la droite (AG_1).
De même pour les autres : G est sur les droites (BG_2) et $CG_3)$.
(b) Par associativité , l'isobarycentre de $\{G_1,G_2,G_3\}$ est le barycentre de $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$: c'est donc G.

10. *ABC étant un triangle équilatéral, déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2+MB^2=MC^2$*
Soit G le barycentre de $\{(A,1),(B,1),(C,-1)\}$. on a :
$MA^2+MB^2-MC^2=0\iff\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2-\overrightarrow{MC}^2=0\iff(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})^2+(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB})^2-(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC})^2=0$
$\overrightarrow{GM}^2+2\overrightarrow{MG}.(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GC})+\overrightarrow{GA}^2+\overrightarrow{GB}^2-\overrightarrow{GC}^2=0\iff\overrightarrow{GM}^2+\overrightarrow{GA}^2+\overrightarrow{GB}^2-\overrightarrow{GC}^2=0$
Mais de la relation $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$, et en posant $I=m[AB]$ on obtient : $\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GI}$ d'où $GC=2GI=\sqrt{3}GA$
Alors , $MA^2+MB^2-MC^2=0\iff GM^2+2GA^2-3GA^2=0\iff GM^2=GA^2$
le lieu recherché est le cercle de centre G et passant par A et B.