

- Montrer que, pour tous vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  de l'espace :  $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge w + (\vec{v} \wedge \vec{w}) \wedge u + (\vec{w} \wedge \vec{u}) \wedge v = \vec{0}$
- Montrer que, pour tous vecteurs  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  et  $\vec{d}$  de l'espace :
  - $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot (\vec{c} \wedge \vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{c} & \vec{a} \cdot \vec{d} \\ \vec{b} \cdot \vec{c} & \vec{b} \cdot \vec{d} \end{vmatrix}$
  - $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge (\vec{c} \wedge \vec{d}) = [\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}] \vec{b} - [\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}] \vec{a} = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}] \vec{c} - [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \vec{d}$
- Calculer les coordonnées dans le repère canonique de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$ , du projeté orthogonal du point  $A(2, 1, 3)$ 
  - sur le plan  $(P)$  d'équation  $x - 2y - 2z = 2$
  - sur la droite passant par  $B(1, 2, 3)$  et  $C(0, -1, 1)$
- Dans l'espace affine euclidien  $\mathbb{R}^3$ , rapporté à son repère canonique orthonormé, calculer les distances :
  - Du point  $A(1, 2, 1)$  au plan  $(P)$  d'équation  $x + y - 3z = 2$ .
  - Du point  $B(2, 1, 2)$  à la droite  $(D)$  passant par  $C(1, -1, -1)$  et dirigée par  $\vec{u}(1, 2, -3)$ .
  - Du point  $B(2, 1, 2)$  à la droite  $(D')$  d'équations  $x + y - 3z = x - 2y = 0$ .
  - Du point origine  $O$  à la droite  $(\Delta)$  d'équations  $x + 2y + 2z = y - x - z = -1$ .
- Soient deux droites  $D$  et  $D'$  non parallèles de l'espace. Montrer qu'il existe une unique droite  $\Delta$  perpendiculaire à  $D$  et  $D'$  (cette droite est appelée perpendiculaire commune à  $D$  et  $D'$ ).
  - Application numérique : trouver la perpendiculaire commune à la droite  $D$  passant par  $A(3, 3, -1)$  dirigée par le vecteur  $\vec{u}(2, 1, 4)$  et la droite  $D'$  déterminée par les équations  $\begin{cases} x = -3z + 1 \\ y = z - 4 \end{cases}$
- Soit  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois points non alignés de l'espace et  $O$  un point n'appartenant pas au plan  $(ABC)$ . Soit  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  les symétriques de  $O$  par rapport aux milieux de  $[B, C]$ ,  $[C, A]$  et  $[A, B]$ . Montrer que les droites  $(AA')$ ,  $(BB')$  et  $(CC')$  sont concourantes.
- Soit  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois points non alignés de l'espace. Soit  $\vec{u}$  un vecteur n'appartenant pas à la direction du plan  $(ABC)$ . On considère trois points  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  définis par :  $\overrightarrow{AA'} = \alpha \vec{u}$ ,  $\overrightarrow{BB'} = \beta \vec{u}$ ,  $\overrightarrow{CC'} = \gamma \vec{u}$  où  $(\alpha, \beta, \gamma) \in (\mathbb{R}^*)^3$ .  
Montrer que les trois plans  $(A'BC)$ ,  $(B'AC)$ ,  $(C'AB)$  sont parallèles à une même droite si et seulement si  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 0$ .
- L'espace est rapporté au repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On considère les plans  $P, P'$  et  $P''$  d'équations respectives :
 
$$\begin{aligned} P &: ax + y + z + 1 = 0 \\ P' &: x + ay + z + a = 0 \\ P'' &: x + y + az + b = 0 \end{aligned}$$
 Déterminer les réels  $a$  et  $b$  pour que l'intersection de ces trois plans soit une droite. Donner alors une représentation paramétrique de cette droite.
- L'espace est rapporté au repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Soit  $D$  la droite représentée paramétriquement par :  $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -2 + 3\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$   
Déterminer, par son équation cartésienne, le plan  $P$  contenant la droite  $D$  et le point  $A(0, -1, 4)$ .
- Soit  $D_1$  et  $D_2$  deux droites non coplanaires de l'espace. Etudier l'ensemble décrit par le milieu d'un segment  $[M_1, M_2]$  où  $M_1 \in D_1$  et  $M_2 \in D_2$ .
  - Soit  $D_1, D_2, D_3$  trois droites non coplanaires deux à deux et non parallèles à un même plan. Démontrer qu'il existe un point unique  $A$  de  $E$  qui pour tout couple  $(i, j) \in \{1, 2, 3\}^2$  tel que  $i \neq j$ ,  $A$  soit le milieu d'un segment joignant un point de  $D_i$  et un point de  $D_j$ .
- L'espace est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Déterminer l'ensemble  $E$  des points équidistants des droites  $D_1 \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$  et  $D_2 \begin{cases} y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$   
Tracer les intersections de  $E$  avec les trois plans de coordonnées.  
Montrer que par tout point de  $E$ , il passe deux droites incluses dans  $E$ .
- L'espace est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . A tout réel  $t$ , on associe le point  $M(t)$  de coordonnées :  $x(t) = \cos(t) + \sqrt{3} \sin(t) + 1$ ,  $y(t) = \cos(t) - \sqrt{3} \sin(t) + 1$ ,  $z(t) = -2 \cos(t) + 1$   
Montrer que lorsque  $t$  décrit  $]-\pi, \pi]$ , le point  $M(t)$  décrit un cercle dont on déterminera le plan, le centre et le rayon.