

**Exercice 1 :**

Montrer que, pour tous vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  de l'espace :  $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} + (\vec{v} \wedge \vec{w}) \wedge \vec{u} + (\vec{w} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{0}$

**Solution :**

Démontrons la formule "du double produit vectoriel" :

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w}) \vec{u}$$

On choisit une BOND  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  telle que  $\vec{u}$  est de coordonnées  $(x, 0, 0)$ ,  $\vec{v}$  est de coordonnées  $(y, z, 0)$  et  $\vec{w}$  est de coordonnées  $(a, b, c)$ .

D'une part  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  est de coordonnées  $(0, 0, xz)$  puis  $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$  est de coordonnées  $(-bxz, axz, 0)$

D'autre part  $(\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w}) \vec{u}$  est de coordonnées  $xa(y, z, 0) - (ya + zb)(x, 0, 0) = (-xzb, axz, 0)$

On constate que la formule du double produit vectoriel est juste.

On applique cette formule à chacun des trois termes de la somme et on trouve ...

$$\begin{aligned} & (\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} + (\vec{v} \wedge \vec{w}) \wedge \vec{u} + (\vec{w} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{v} \\ &= (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w}) \vec{u} + (\vec{v} \cdot \vec{u}) \vec{w} - (\vec{w} \cdot \vec{u}) \vec{v} + (\vec{w} \cdot \vec{v}) \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{w} = \vec{0} \end{aligned}$$

**Exercice 2 :**

Montrer que, pour tous vecteurs  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  et  $\vec{d}$  de l'espace :

$$(a) (\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot (\vec{c} \wedge \vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{c} & \vec{a} \cdot \vec{d} \\ \vec{b} \cdot \vec{c} & \vec{b} \cdot \vec{d} \end{vmatrix}$$

$$(b) (\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge (\vec{c} \wedge \vec{d}) = [\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}] \vec{b} - [\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}] \vec{a} = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}] \vec{c} - [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \vec{d}$$

**Solution :**

(a) On sait que  $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = \text{Det}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \text{Det}(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) = (\vec{v} \wedge \vec{w}) \cdot \vec{u}$

Il en résulte que :  $A = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot (\vec{c} \wedge \vec{d}) = (\vec{b} \wedge (\vec{c} \wedge \vec{d})) \cdot \vec{a} = -((\vec{c} \wedge \vec{d}) \wedge \vec{b}) \cdot \vec{a}$

En utilisant la formule du double produit vectoriel, on trouve ensuite que :

$$A = -((\vec{c} \cdot \vec{b}) \vec{d} - (\vec{d} \cdot \vec{b}) \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{d} \cdot \vec{b}) (\vec{c} \cdot \vec{a}) - (\vec{c} \cdot \vec{b}) (\vec{d} \cdot \vec{a}) = \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{c} & \vec{a} \cdot \vec{d} \\ \vec{b} \cdot \vec{c} & \vec{b} \cdot \vec{d} \end{vmatrix}$$

(b) Utilisons de nouveau la formule du double produit vectoriel :

$$\begin{aligned} B &= (\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge (\vec{c} \wedge \vec{d}) = (\vec{a} \cdot (\vec{c} \wedge \vec{d})) \vec{b} - (\vec{b} \cdot (\vec{c} \wedge \vec{d})) \vec{a} = \text{Det}(\vec{c}, \vec{d}, \vec{a}) \vec{b} - \text{Det}(\vec{c}, \vec{d}, \vec{b}) \vec{a} \\ &= [\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}] \vec{b} - [\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}] \vec{a} \end{aligned}$$

La relation  $B = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge (\vec{c} \wedge \vec{d}) = -(\vec{c} \wedge \vec{d}) \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b})$  et l'application de ce qui est au-dessus, nous prouve la deuxième égalité.

**Exercice 3 :**

Calculer les coordonnées dans le repère canonique de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$ , du projeté orthogonal du point  $A(2, 1, 3)$

(a) sur le plan  $(P)$  d'équation  $x - 2y - 2z = 2$

(b) sur la droite passant par  $B(1, 2, 3)$  et  $C(0, -1, 1)$

**Solution :**

(a) la droite  $\Delta$  orthogonale à  $(P)$  et passant par  $A$  est de représentation paramétrique : 
$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$$

le projeté orthogonal  $H$  de  $A$  sur  $(P)$  est l'intersection de cette droite  $\Delta$  et du plan  $(P)$ .

On recherche  $H(x, y, z)$  vérifiant :

$$\begin{cases} \exists t \in \mathbb{R} \text{ t.q. :} \\ x = 2 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 3 - 2t \\ \text{et } x - 2y - 2z = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} \exists t \in \mathbb{R} \text{ t.q. :} \\ x = 2 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 3 - 2t \text{ et} \\ 2 + t - 2(1 - 2t) - 2(3 - 2t) = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} \exists t \in \mathbb{R} \text{ t.q. :} \\ x = 2 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 3 - 2t \\ \text{et } t = \frac{8}{9} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{26}{9} \\ y = -\frac{7}{9} \\ z = \frac{11}{9} \end{cases}$$

le projeté orthogonal de  $A$  sur  $(P)$  est  $H(\frac{26}{9}, -\frac{7}{9}, \frac{11}{9})$ .

(b) Le vecteur  $\vec{CB}(1, 3, 2)$  dirige la droite  $(BC)$ , dont une représentation paramétrique est : 
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

le plan  $(Q)$ , orthogonal à  $(BC)$  et passant par  $A(2, 1, 3)$  est d'équation :  $x + 3y + 2z - 11 = 0$

le projeté orthogonal  $K$  de  $A$  sur  $(BC)$  est l'intersection de la droite  $\Delta$  et du plan  $(Q)$ .

On recherche  $K(x, y, z)$  vérifiant :

$$\begin{cases} \exists t \in \mathbb{R} \text{ t.q. :} \\ x = 1 + t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 + 2t \text{ et} \\ x + 3y + 2z - 11 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \exists t \in \mathbb{R} \text{ t.q. :} \\ x = 1 + t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 + 2t \text{ et} \\ 1 + t + 3(2 + 3t) + 2(3 + 2t) - 11 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \exists t \in \mathbb{R} \text{ t.q. :} \\ x = 1 + t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 + 2t \text{ et} \\ t = -\frac{1}{7} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{6}{7} \\ y = \frac{11}{7} \\ z = \frac{19}{7} \end{cases}$$

le projeté orthogonal de  $A$  sur  $(BC)$  est  $K(\frac{6}{7}, \frac{11}{7}, \frac{19}{7})$

#### Exercice 4 :

Dans l'espace affine euclidien  $\mathbb{R}^3$ , rapporté à son repère canonique orthonormé, calculer les distances :

- Du point  $A(1, 2, 1)$  au plan  $(P)$  d'équation  $x + y - 3z = 2$ .
- Du point  $B(2, 1, 2)$  à la droite  $(D)$  passant par  $C(1, -1, -1)$  et dirigée par  $\vec{u}(1, 2, -3)$ .
- Du point  $B(2, 1, 2)$  à la droite  $(D')$  d'équations  $x + y - 3z = x - 2y = 0$ .
- Du point origine  $O$  à la droite  $(\Delta)$  d'équations  $x + 2y + 2z = y - x - z = -1$ .

#### Solution :

(a) On un vecteur normal au plan  $(P)$  est  $\vec{n}(1, 1, -3)$ . Ce qui nous permet de trouver :

$$d(A, P) = \frac{|x_A + y_A - 3z_A - 2|}{\|\vec{n}\|} = \frac{2\sqrt{11}}{11}$$

(b) Pour appliquer la formule du cours, on calcule les coordonnées de  $\vec{CB} \wedge \vec{u}$  et on obtient  $(12, -6, 0)$  qui est aussi  $6(2, -1, 0)$ . La norme de ce vecteur est  $6\sqrt{5}$ .

$$d(B, D) = \frac{\|\vec{CB} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{6\sqrt{5}}{\sqrt{14}}$$

(c) La droite  $(D')$  est décrite sous la forme d'une intersection de deux plans. On peut d'abord en déterminer une représentation paramétrique

$$x + y - 3z = x - 2y = 0 \iff \begin{cases} x = 2y \\ y = 3z - x = 3z - 2y \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2z \\ y = z \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que la droite  $(D')$  passe par le point  $O(0, 0, 0)$ , et est dirigée par le vecteur  $\vec{u}'(2, 1, 1)$  (par exemple).

Pour appliquer la formule du cours, on calcule les coordonnées de  $\vec{OB} \wedge \vec{u}'$  et on obtient  $(-1, 2, 0)$ .

$$d(B, D') = \frac{\|\vec{OB} \wedge \vec{u}'\|}{\|\vec{u}'\|} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{30}}{6}$$

(d) La droite  $(\Delta)$  est décrite sous la forme d'une intersection de deux plans. On peut d'abord en déterminer une représentation paramétrique

$$x + 2y + 2z = y - x - z = -1 \iff \begin{cases} x + 2y + 2z = -1 \\ 3y + z = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -1 - 2y - 2z \\ z = -2 - 3y \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3 + 4y \\ z = -2 - 3y \end{cases}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

On en déduit que la droite  $(\Delta)$  passe par le point  $F(3, 0, -2)$ , et est dirigée par le vecteur  $\vec{v}(4, 1, -3)$  (par exemple).

Pour appliquer la formule du cours, on calcule les coordonnées de  $\vec{FO} \wedge \vec{v}$  et on obtient  $(-2, -1, -3)$  qui est de norme  $\sqrt{14}$ .

$$d(O, \Delta) = \frac{\|\vec{FO} \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|} = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{13}}$$

#### Exercice 5 :

- Soient deux droites  $D$  et  $D'$  non parallèles de l'espace. Montrer qu'il existe une unique droite  $\Delta$  perpendiculaire à  $D$  et  $D'$  (cette droite est appelée perpendiculaire commune à  $D$  et  $D'$ ).
- Application numérique : trouver la perpendiculaire commune à la droite  $D$  passant par  $A(3, 3, -1)$  dirigée par le vecteur  $\vec{u}(2, 1, -1)$  et la droite  $D'$  déterminée par les équations  $\begin{cases} x = -3z + 1 \\ y = z - 4 \end{cases}$

**Solution :**

(a) On note  $\vec{u}$  (respectivement  $\vec{u}'$ ) un vecteur directeur de  $D$  (respectivement  $D'$ ) et  $A$  un point de  $D$ .

On pose  $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{u}'$ . Remarquons qu'ayant  $D$  et  $D'$  non parallèles, on en déduit que  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'$  sont non colinéaires et donc que  $\vec{n}$  est non nul.

On peut aussi dire que  $\vec{u}$  et  $\vec{n}$  sont orthogonaux (ils ne sont donc pas colinéaires)

On note  $\mathcal{P}_1$ , le plan passant par  $A$  et dirigé par  $\vec{u}$  et  $\vec{n}$ .

Notons que  $\vec{u}$ ,  $\vec{u}'$  et  $\vec{n}$  sont non-coplanaires, donc on ne peut pas avoir  $D'$  parallèle à  $\mathcal{P}_1$ .

Donc  $\mathcal{P}_1 \cap D'$  est réduit à un point que l'on note  $H'$ .

on considère la droite  $\Delta(H', \vec{n})$ . Cette droite est incluse dans  $\mathcal{P}_1$  et dirigée par  $\vec{n}$ .

$\Delta$  et  $D$  sont deux droites incluses dans  $\mathcal{P}_1$  dont les vecteurs directeurs  $\vec{n}$  et  $\vec{u}$  sont non colinéaires

la droite  $\Delta$  est sécante avec  $D$ .

Bilan :  $\Delta$  est sécante avec  $D$  et  $D'$ . Le vecteur  $\vec{n}$  qui dirige  $\Delta$  est orthogonal à  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'$ .  $\Delta$  est perpendiculaire à  $D$  et à  $D'$ .

(b) Application numérique :

$D'$  passe par le point  $A'(1, -4, 0)$  et est dirigée par le vecteur  $\vec{u}'(-3, 1, 1)$ .

Le vecteur  $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{u}'$  est de coordonnées  $(2, 1, 5)$

le plan  $\mathcal{P}_1$  de repère  $(A, \vec{u}, \vec{n})$  est de vecteur normal  $\vec{u} \wedge \vec{n} (1, -2, 0)$

Une équation cartésienne de  $\mathcal{P}_1$  est :  $x - 2y + 3 = 0$

Le point  $H'$  intersection de  $\mathcal{P}_1$  et  $D'$  est t.q. :

$$\begin{cases} x = 1 - 3z \\ y = -4 + z \\ x - 2y + 3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 - 3z \\ y = -4 + z \\ 1 - 3z - 2(-4 + z) + 3 = 0 \end{cases} \iff (x, y, z) = \left( \frac{-31}{5}, \frac{-8}{5}, \frac{12}{5} \right)$$

La perpendiculaire commune à  $D$  et  $D'$  est la droite  $\Delta$  de repère  $(H', \vec{n})$ .

On peut en donner une représentation paramétrique : 
$$\begin{cases} x = \frac{-31}{5} + 2t \\ y = \frac{-8}{5} + t \\ z = \frac{12}{5} + 5t \end{cases}$$

**Exercice 6 :**

Soit  $A, B$  et  $C$  trois points non alignés de l'espace et  $O$  un point n'appartenant pas au plan  $(ABC)$ . Soit  $A', B'$  et  $C'$  les symétriques de  $O$  par rapport aux milieux de  $[B, C]$ ,  $[C, A]$  et  $[A, B]$ . Montrer que les droites  $(AA')$ ,  $(BB')$  et  $(CC')$  sont concourantes.

**Solution :**

première étape : on fait une figure et on cherche une solution possible

...figure que je ne reproduis pas ici.

On remarque que les points  $O, A, I = m[BC]$  et  $A'$  sont coplanaires : appelons  $P_A$  ce plan. Si l'énoncé est exact alors ce point recherché appartient à  $P_A$ .

En construisant, de même le plan  $P_B$  et le plan  $P_C$ , on voit que le point recherché ne peut être que dans l'alignement de  $O$  et  $G$  isobarycentre de  $A, B, C$ .

il paraît alors judicieux de rechercher ce point sous la forme d'un barycentre.

Supposons que ce point  $G_1$  soit barycentre de  $(A', t)$  et  $(A, 1 - t)$ . Alors il vérifie :

$$\overrightarrow{OG_1} = t\overrightarrow{OA'} + (1 - t)\overrightarrow{OA} = 2t\overrightarrow{OI} + (1 - t)\overrightarrow{OA} = t(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) + (1 - t)\overrightarrow{OA} = t\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OC} + (1 - t)\overrightarrow{OA}$$

A ce niveau, on se décide à choisir  $t = \frac{1}{2}$ , car le point obtenu sera le même par permutation de  $A, B, C$ .

deuxième étape : on vérifie rigoureusement qu'on obtient bien la solution au problème

Posons  $G_1$  le barycentre de  $(A', \frac{1}{2})$  et  $(A, \frac{1}{2})$ . (on est d'accord :  $G_1$  est le milieu de  $[A, A']$ )

On constate que  $\overrightarrow{OG_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OA'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OG}$

de même, si on considère  $G_2 = m[BB']$  et  $G_3 = m[CC']$ , on aura également  $\overrightarrow{OG_2} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OG_3} = \overrightarrow{OG_1}$

Donc  $G_1 = G_2 = G_3$  : les droites  $(AA')$ ,  $(BB')$  et  $(CC')$  sont concourantes.

**Exercice 7 :**

Soit  $A, B$  et  $C$  trois points non alignés de l'espace. Soit  $\vec{u}$  un vecteur n'appartenant pas à la direction du plan  $(ABC)$ . On considère trois points  $A', B'$  et  $C'$  définis par :  $\overrightarrow{AA'} = \alpha \vec{u}$ ,  $\overrightarrow{BB'} = \beta \vec{u}$ ,  $\overrightarrow{CC'} = \gamma \vec{u}$  où  $(\alpha, \beta, \gamma) \in (\mathbb{R}^*)^3$ .

Montrer que les trois plans  $(A'BC)$ ,  $(B'AC)$ ,  $(C'AB)$  sont parallèles à une même droite si et seulement si  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 0$ .

**Solution :**

On fait les calculs dans un repère orthonormal direct  $\mathcal{R} = (A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  tel que  $\overrightarrow{AB}$  soit colinaire à  $\vec{i}$  et le plan  $(ABC)$  soit de repère  $(A, \vec{i}, \vec{j})$ .

Ceci étant choisi de telle sorte que  $A(0,0,0)$ ,  $B(r,0,0)$  et  $C(s,t,0)$  et  $\vec{u}(a,b,c)$ . On a  $r, s, t$  et  $c$  non nuls pour répondre aux hypothèses.

On détermine les coordonnées des autres points dans ce repère :  $A'(\alpha a, \alpha b, \alpha c)$ ,  $B'(r + \beta a, \beta b, \beta c)$  et  $C'(s + \gamma a, \gamma b, \gamma c)$

Un vecteur normal au plan  $(A'BC)$  est  $\vec{n}_1 = \overrightarrow{BA'} \wedge \overrightarrow{BC'}$  de coord.  $\begin{pmatrix} s-r \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \alpha a - r \\ \alpha b \\ \alpha c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha ct \\ \alpha cr - \alpha cs \\ \alpha bs - \alpha br - \alpha ta + rt \end{pmatrix}$

Un vecteur normal au plan  $(B'AC)$  est  $\vec{n}_2 = \overrightarrow{AC'} \wedge \overrightarrow{AB'}$  de coord.  $\begin{pmatrix} s \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} r + \beta a \\ \beta b \\ \beta c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta ct \\ -\beta cs \\ \beta bs - \beta ta - rt \end{pmatrix}$

Un vecteur normal au plan  $(C'AB)$  est  $\vec{n}_3 = \overrightarrow{AB'} \wedge \overrightarrow{AC'}$  de coord.  $\begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \gamma a + s \\ \gamma b + t \\ \gamma c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\gamma cr \\ \gamma br + rt \end{pmatrix}$

Les trois plans  $(A'BC)$ ,  $(B'AC)$ ,  $(C'AB)$  sont parallèles à une même droite si et seulement si les vecteurs  $\vec{n}_1, \vec{n}_2$  et  $\vec{n}_3$  sont coplanaires

$$\Leftrightarrow \text{Det}(\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \alpha ct & \beta ct & 0 \\ \alpha cr - \alpha cs & -\beta cs & -\gamma cr \\ \alpha bs - \alpha br - \alpha ta + rt & \beta bs - \beta ta - rt & \gamma br + rt \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow c^2 t \begin{vmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \alpha r - \alpha s & -\beta s & -\gamma r \\ \alpha bs - \alpha br - \alpha ta + rt & \beta bs - \beta ta - rt & \gamma br + rt \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 & \beta & 0 \\ 0 & -\beta s & -\gamma r \\ rt + \frac{\alpha}{\beta} rt + \frac{\alpha}{\gamma} rt & \beta bs - \beta ta - rt & \gamma br + rt \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\beta \gamma r^2 t \left(1 + \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha}{\gamma}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 0$$

en utilisant  $r \neq 0, s \neq 0, t \neq 0, c \neq 0, \alpha \neq 0, \beta \neq 0, \gamma \neq 0$

**Exercice 8 :**

L'espace est rapporté au repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On considère les plans  $P, P'$  et  $P''$  d'équations respectives :

$$P : ax + y + z + 1 = 0$$

$$P' : x + ay + z + a = 0$$

$$P'' : x + y + az + b = 0$$

Déterminer les réels  $a$  et  $b$  pour que l'intersection de ces trois plans soit une droite. Donner alors une représentation paramétrique de cette droite.

**Solution :**

première étape : on cherche une solution possible

un vecteur normal à  $P$  est  $\vec{n}_1(a, 1, 1)$

un vecteur normal à  $P'$  est  $\vec{n}_2(1, a, 1)$

un vecteur normal à  $P''$  est  $\vec{n}_3(1, 1, a)$

Si l'intersection de ces trois plans est une droite alors ces trois vecteurs sont coplanaires.

$$\text{Det}(\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3) = 0 \iff \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = 0 \iff a^3 + 2 - 3a = 0 \iff (a-1)^2(a+2) = 0$$

"Un premier candidat éliminé" : si  $a = 1$  alors  $P = P'$  et  $P''$  est parallèle ou confondu à  $P$ . L'intersection de ces trois plans ne peut pas être une droite.

La seule possibilité envisageable pour  $a$  est donc  $a = -2$ . Mais alors les équations deviennent :

$$P : -2x + y + z + 1 = 0$$

$$P' : x - 2y + z - 2 = 0 \quad \text{et alors } \ell_1 + \ell_2 + \ell_3 \Rightarrow b - 1 = 0$$

$$P'' : x + y - 2z + b = 0$$

deuxième étape : on vérifie rigoureusement qu'on obtient bien la solution au problème avec  $a = -2$  et  $b = 1$

dans ce cas, chercher l'intersection des trois plans revient à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} -2x + y + z + 1 = 0 \\ x - 2y + z - 2 = 0 \\ x + y - 2z + 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y - 2z + 1 = 0 \\ x - 2y + z - 2 = 0 \\ -2x + y + z + 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y - 2z + 1 = 0 \\ -3y + 3z - 3 = 0 \\ -2x + y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y - 2z + 1 = 0 \\ -3y + 3z - 3 = 0 \\ 3y - 3z + 3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = z - 1 \end{cases}$$

Ce qui est la représentation paramétrique d'une droite. On peut préciser que c'est la droite passant par le point  $A(0, -1, 0)$  et dirigée par le vecteur  $\vec{u}(1, 1, 1)$ .

#### Exercice 9 :

L'espace est rapporté au repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Soit  $D$  la droite représentée paramétriquement par :

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -2 + 3\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$$

Déterminer, par son équation cartésienne, le plan  $P$  contenant la droite  $D$  et le point  $A(0, -1, 4)$ .

#### Solution :

$D$  est la droite passant par le point  $T(1, -2, 3)$  et dirigée par le vecteur  $\vec{u}(2, 3, 1)$

le vecteur  $\vec{AT} \wedge \vec{u}$  de coordonnées  $(2, -3, 5)$  est un vecteur normal au plan recherché.

Sachant que  $P$  contient  $A$ , une équation cartésienne de  $P$  est donc :  $2x - 3y + 5z = 23$ .

#### Exercice 10 :

(a) Soit  $D_1$  et  $D_2$  deux droites non coplanaires de l'espace. Etudier l'ensemble décrit par le milieu d'un segment  $[M_1, M_2]$  où  $M_1 \in D_1$  et  $M_2 \in D_2$ .

(b) Soit  $D_1, D_2, D_3$  trois droites non coplanaires deux à deux et non parallèles à un même plan. Démontrer qu'il existe un point unique  $A$  de  $E$  qui pour tout couple  $(i, j) \in \{1, 2, 3\}^2$  tel que  $i \neq j$ ,  $A$  soit le milieu d'un segment joignant un point de  $D_i$  et un point de  $D_j$ .

#### Solution :

#### Exercice 11 :

L'espace est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Déterminer l'ensemble  $E$  des points équidistants des

$$\text{droites } D_1 \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{et } D_2 \begin{cases} y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

Tracer les intersections de  $E$  avec les trois plans de coordonnées.

Montrer que par tout point de  $E$ , il passe deux droites incluses dans  $E$ .

#### Solution :

#### Exercice 12 :

L'espace est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . A tout réel  $t$ , on associe le point  $M(t)$  de coordonnées :  $x(t) = \cos(t) + \sqrt{3}\sin(t) + 1$ ,  $y(t) = \cos(t) - \sqrt{3}\sin(t) + 1$ ,  $z(t) = -2\cos(t) + 1$  Montrer que lorsque  $t$  décrit  $]-\pi, \pi]$ , le point  $M(t)$  décrit un cercle dont on déterminera le plan, le centre et le rayon.

#### Solution :