Exercice 1 :

Résoudre les équations suivantes sur des intervalles que l'on précisera.

(a) (E_1) $xy' + y = \arctan(x)$

(b) (E_2) : $x' + 2tx = e^{t-t^2}$

(c) (E_3) : $f' + f = \sin(x) + 3\sin(2x)$

Solution :

(a) résolution de (E_1) $xy' + y = \arctan(x)$

l'équation homogène associée à (E_1) est : (H_1) : $xy'(x) + y(x) = 0$

une solution de H_1 est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, qui vérifie en particulier sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ l'équation normalisée : $y'(x) = -\dfrac{1}{x}y(x)$ $(*)$.

une primitive de $u : x \longmapsto -\dfrac{1}{x}$ est $U : x \longmapsto -\ln|x|$ et

les solutions de $(*)$ et de (H_1) sur $]-\infty, 0[$ sont les fonctions $y : x \longmapsto C_1 e^{-\ln|x|} = \dfrac{C_1}{|x|} = \dfrac{K}{x}$

de même, les solutions de $(*)$ et de (H_1) sur $]0, +\infty[$ sont les fonctions $y : x \longmapsto Ce^{-\ln|x|} = \dfrac{C}{x}$

Il n'existe qu'une solution de (H_1) sur $\mathbb{R}$: c'est la fonction nulle.

Pour résoudre l'équation complète (E_1) : ; $xy' + y = \arctan(x)$, on utilise la méthode de variation de la constante.

pour $x \in]0, +\infty[$ on pose $y(x) = \dfrac{C(x)}{x}$. Alors $y'(x) = \dfrac{C'(x)}{x} - \dfrac{C(x)}{x^2}$.

y est solution de $(E_1) \Longleftrightarrow xy'(x) + y(x) = C'(x) = \arctan(x) \Longleftrightarrow C(x) = \displaystyle\int_0^x \arctan(t)\,\mathrm{d}t + cste$

On intègre par parties, en posant $u'(t) = 1$ et $v(t) = \arctan(t)$, et on a $u(t) = t$ et $v'(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$

$C(x) = \displaystyle\int_0^x \arctan(t)\,\mathrm{d}t + cste = [t.\arctan(t)]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + cste = x\arctan(x) + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + cste$

on récupère $y(x) = \dfrac{C(x)}{x} = \arctan(x) + \dfrac{\ln(1+x^2)}{2x} + \dfrac{C}{x}$

De même, pour $x \in]-\infty, 0[$, les solutions de E_1 sont les fonctions $y : x \longmapsto \arctan(x) + \dfrac{\ln(1+x^2)}{2x} + \dfrac{C}{x}$

Etudions l'équation sur $\mathbb{R}$: nous recherchons une fonction y dérivable sur $\mathbb{R}$ solution de (E_1). Alors la restriction de y à $]0, +\infty[$ et a $]-\infty, 0[$ a la forme ci-dessus, et si on veut que la limite de y en 0 existe, il faut que $C = 0$ soit $y(x) = \arctan(x) + \dfrac{\ln(1+x^2)}{2x}$

notons au passage que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{2}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = 0$ par application de $\displaystyle\lim_{u\to 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1$

On a nécessairement $y(x) = y_0(x) = \arctan(x) + \dfrac{\ln(1+x^2)}{2x}$ si $x \neq 0$ et $y_0(0) = 0$.

Cette fonction y_0 est continue en 0.

La fonction $g : x \longmapsto \dfrac{\ln(1+x^2)}{2x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$ est dérivable en 0. En effet, en revenant à la définition de la dérivabilité : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = \frac{1}{2} = g'(0)$

avec $\arctan'(0) = 1$, on a y_0 dérivable en 0 et $y_0'(0) = \dfrac{3}{2}$

Il existe une solution de (E_1) sur $\mathbb{R}$ qui est $y_0 : x \longmapsto \arctan(x) + \dfrac{\ln(1+x^2)}{2x}$ si $x \neq 0$ et $y_0(0) = 0$.

(b) résolution de (E_2) : $x' + 2tx = e^{t-t^2}$

l'équation homogène associée à (E_2) est : (H_2) : $x'(t) + 2tx(t) = 0$

on recherche les fonction dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall t \in \mathbb{R}$, $x'(t) = -2tx(t)$

une primitive de $u : t \longmapsto -2t$ est $U : t \longmapsto -t^2$

l'ensemble des solutions de l'équation homogène est donc $\left\{x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \,;\, t \longmapsto Ce^{-t^2} \;\; /C \in \mathbb{R}\right\}$

Résolution de l'équation complète : (E_2) : $x' + 2tx = e^{t-t^2}$

il suffit de noter que la fonction $x_P : t \longmapsto e^{t-t^2}$ est solution de (E_2)
l'ensemble des solutions de l'équation (E_2) est donc $\mathcal{S}_2 = \left\{x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ ; \ t \longmapsto e^{t-t^2} + Ce^{-t^2} \ \ /C \in \mathbb{R}\right\}$

(c) Résolution de (E_3) : $f' + f = \sin(x) + 3\sin(2x)$
l'équation homogène associée à (E_2) est : $f' + f = 0$ dont les solutions sont les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ ; \ x \longmapsto Ce^{-x}$ où $C \in \mathbb{R}$.
Par principe de superposition, on recherche une solution particulière de (E_3) sous la forme $f_p(x) = a\cos(x) + b\sin(x) + c\cos(2x) + d\sin(2x)$ et dans ce cas
$f_p'(x) + f_p(x) = (a+b)\cos(x) + (-a+b)\sin(x) + (c+2d)\cos(2x) + (-2c+d)\sin(2x) = \sin(x) + 3\sin(2x)$

$$\iff \begin{cases} a+b=0 \\ -a+b=1 \\ c+2d=0 \\ -2c+d=3 \end{cases} \iff (a,b,c,d) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{6}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

l'ensemble des solutions de l'équation (E_3) est donc
$\mathcal{S}_3 = \left\{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ ; \ x \longmapsto -\dfrac{1}{2}\cos(x) + \dfrac{1}{2}\sin(x) - \dfrac{6}{5}\cos(2x) + \dfrac{3}{5}\sin(2x) + Ce^{-x} \ / \ \ C \in \mathbb{R}\right\}$

Exercice 2 :

Soit l'équation différentielle

$$(E) : \ y'\cos(t) + y\sin(t) = \cos(t) + t\sin(t)$$

(fonction inconnue y, variable réelle t)

(a) *Pour tout entier k , résoudre l'équation (E) sur l'intervalle* $I_k = \left]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi ; \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[$

(b) *Pour tout entier p , résoudre (E) sur* $J_p = \left]-\dfrac{\pi}{2} + 2p\pi ; \dfrac{3\pi}{2} + 2p\pi\right[$ *et* $K_p = \left]-\dfrac{3\pi}{2} + 2p\pi ; \dfrac{\pi}{2} + 2p\pi\right[$

(c) *Montrer qu'il existe une et une seule solution de (E) sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition $y(0) = 1$.*

Solution :

(a) Pour tout entier k , on va résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $I_k = \left]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi ; \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[$
Résolution de l'équation homogène (H) : $y'\cos(t) + y\sin(t) = 0$.
Sur l'intervalle I_k, la fonction cos est non nulle, (H) est équivalente à $y'(t) = -\dfrac{sin(t)}{\cos(t)}$
Une primitive de la fonction $u : t \longmapsto \dfrac{-\sin(t)}{\cos(t)}$ est $U : t \longmapsto \ln|\cos(t)|$
Il en résulte que $y_H(t) = Ce^{\ln(|\cos(t)|)} = C|\cos(t)|$ avec C constante réelle.
Selon la parité de k, on aura $y_H(t) = C\cos(t)$ ou $y_H(t) = -C\cos(t)$, et si on nomme $C_k = C$ dans le premier cas et $C_k = -C$ dans le deuxième cas, on a dans les deux cas $y_H(t) = C_k\cos(t)$.
Une solution évidente de l'équation complète (E) est $y_P : t \longmapsto t$
l'ensemble des solutions de (E) sur I_k est donc :
$\mathcal{S}_k = \{y : I_k \longrightarrow \mathbb{R} \ ; \ t \longmapsto t + C_k\cos(t) \ / \ \ C_k \in \mathbb{R}\}$

(b) Je ne comprends pas l'intérêt de cette question dont on a donné la réponse ci-dessus.

(c) Montrons qu'il existe une et une seule solution de (E) sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition $y(0) = 1$.
On effectue un raisonnement par analyse-synthèse :
première partie : analyse
Supposons que y est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ telle que $y(0) = 1$.
Alors , sur chaque intervalle I_k, il existe une constante C_k telle que $y(t) = t + C_k\cos(t)$.
En particulier, pour $k = 0$, la condition $y(0) = 1$ impose que $C_0 = 1$.

Mais alors , au voisinage du point $t = \dfrac{\pi}{2}$, on a $y(t) = t + \cos(t)$ si $t < \dfrac{\pi}{2}$ et $y(t) = t + C_1 \cos(t)$ pour $t > \dfrac{\pi}{2}$
or, on recherche une fonction y est dérivable en $\frac{\pi}{2}$, donc cela imlique $C_1 = 1$ (car $\cos'(\frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1 \neq 0$)
On procède de proche en proche et, à chaque jonction $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$, la dérivabilité de y implique $C_k = 1$.
La seule solution envisageable est donc $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto t + \cos(t)$
deuxième partie : synthèse on vérifie que la seule solution envisageable est bien solution de (E).
Soit la fonction $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto t + \cos(t)$.
y est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $y'(t) = 1 - \sin(t)$.
En remplaçant dans l'équation (E), on constate que
$y'(t)\cos(t) + y(t)\sin(t) = (1 - \sin(t))\cos(t) + (t + \cos(t))\sin(t) = \cos(t) + t\sin(t)$

Exercice 3 :

Soit l'équation différentielle $(x + 1)y' + xy = x^2 - x + 1$

(a) *Trouver une solution polynômiale.*

(b) *En déduire l'ensemble des solutions sur* $\mathbb{R}$.

(c) *Déterminer la solution vérifiant la condition initiale* $y(1) = 1$

Solution :

(a) Trouvons une solution polynômiale. On pense a priori à un polynôme de degré 2 :
Si $y(x) = ax^2 + bx + c$ alors $(x + 1)y' + xy = x^2 - x + 1 \Longleftrightarrow (x + 1)(2ax + b) + x(ax^2 + bx + c) = x^2 - x + 1$

$$\Longleftrightarrow ax^3 + (b + 2a)x^2 + (2a + b + c)x + b = x^2 - x + 1 \Longleftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b + 2a = 1 \\ 2a + b + c = -1 \\ b = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow (a, b, c) = (0, 1, -2)$$

On constate que le polynôme trouve est en fait de degré 1.
une solution particulière de l'équation est donc $y_P : x \longmapsto x - 2$

(b) On en déduit l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$:
Etudions l'équation homogène : (H) : $(x + 1)y' + xy = 0$
Sur l'intervalle $]-1, +\infty[$, H est équivalente à $y'(x) = -\dfrac{x}{x + 1}y(x)$
Une primitive de $u : x \longmapsto -\dfrac{x}{x + 1} = -1 + \dfrac{1}{x + 1}$ est $U : x \longmapsto -x + \ln|x + 1|$
les solutions de (H) sur l'intervalle $]-1, +\infty[$ sont les fonctions $y_H : x \longmapsto Ce^{-x+\ln|x+1|} = C|x + 1|e^{-x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.
On trouve de même sur $]-\infty, -1[$, $y_H(x) = C|x+1|e^{-x}$, et, quitte à changer C en $-C$, on a, sur les deux intervalles $y_H(x) = C(x + 1)e^{-x}$.
Recherchons les solutions de (H) sur $\mathbb{R}$.
La restriction de y_H à $]-\infty, -1[$ est de la forme $y_H(x) = C_1(x + 1)e^{-x}$ et la restriction de y_H à $]-1, +\infty[$ est de la forme $y_H(x) = C_2(x + 1)e^{-x}$
comme $y'_H(x) = Ce^{-x} - C(x+1)e^{-x}$, si on veut que la fonction y_H soit dérivable en $x = -1$, on doit choisir la même constante sur les deux intervalles.
Les solutions de (H) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $y_H : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \longmapsto C(x + 1)e^{-x}$ où $C \in \mathbb{R}$.
l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ est donc :
$\mathcal{S} = \{y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \longmapsto x - 2 + C(x + 1)e^{-x}\ /\ C \in \mathbb{R}\}$

(c) Déterminons la solution vérifiant la condition initiale $y(1) = 1$
$y(1) = 1 \Longleftrightarrow -1 + C2e^{-1} = 1 \Longleftrightarrow C = e$
La solution vérifiant $y(1) = 1$ est la fonction $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \longmapsto x - 2 + e(x + 1)e^{-x}$

Exercice 4 :

Résoudre sur $]0,+\infty[$ *l'équation différentielle*

$$x^2y' + y = x^2$$

(on fera apparaître une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer). Déterminer une solution prolongeable par continuité en 0.

Solution :

Equation homogène : (H) ; $x^2y'(x) + y(x) = 0 \iff y'(x) = -\dfrac{1}{x^2}y(x)$ sur $]0,+\infty[$.

une primitive de $u :\longmapsto -\dfrac{1}{x^2}$ est $U : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$

Donc les solutions de (H) sont les fonctions $y_H : x \longmapsto Ce^{\frac{1}{x}}$ où $C \in \mathbb{R}$.

Utilisons la méthode de variation de la constante pour echercher une (toutes les) solution(s) de l'équation complète (E) : $x^2y'(x) + y(x) = x^2$

on pose $y(x) = C(x)e^{\frac{1}{x}}$ que l'on remplace dans l'équation (E).

y est solution de $E \iff \forall x > 0$, $x^2(C'(x)e^{\frac{1}{x}} - \dfrac{1}{x^2}C(x)e^{\frac{1}{x}}) + C(x)e^{\frac{1}{x}} = x^2 \iff \forall x > 0$, $C'(x)e^{\frac{1}{x}} = 1$

$\iff \forall x > 0$, $C'(x) = e^{-\frac{1}{x}} \iff C(x) = \displaystyle\int_1^x e^{-\frac{1}{t}}\,\mathrm{d}t + K$ où $K \in \mathbb{R}$

l'ensemble des solutions de (E) est donc :

$\mathcal{S} = \left\{ y :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \longmapsto e^{\frac{1}{x}} \displaystyle\int_1^x e^{-\frac{1}{t}}\,\mathrm{d}t + Ke^{\frac{1}{x}}\ /\ K \in \mathbb{R} \right\}$

Question plus difficile :

Tout d'abord $\displaystyle\lim_{t\to 0} e^{-\frac{1}{t}} = 0$ donc la fonction $g : t \longmapsto e^{-\frac{1}{t}}$ si $t > 0$ et $g(0) = 0$ est continue sur $[0,+\infty[$.

On peut donc définir l'intégrale $\displaystyle\int_0^x e^{-\frac{1}{t}}\,\mathrm{d}t = \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$

les solutions de (E) peuvent donc s'écrirent sous la forme $y :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \longmapsto e^{\frac{1}{x}} \displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t + Ce^{\frac{1}{x}}\ /\ C \in \mathbb{R}$

Ensuite $\forall t \in [0,x]$, $0 \leqslant g(t) \leqslant e^{\frac{-1}{x}}$

lorsqu'on intègre (avec les bornes dans le bon sens), cela implique : $0 \leqslant \displaystyle\int_0^x g(t)dt \leqslant xe^{-\frac{1}{x}}$

ce qui donne $0 \leqslant e^{\frac{1}{x}} \displaystyle\int_0^x g(t)dt \leqslant x$

Par encadrement , $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} \int_0^x g(t)dt = 0$.

Donc la solution $y_0 :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \longmapsto e^{\frac{1}{x}} \displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$ est prolongeable par continuité en 0 en posant $y_0(0) = 0$.

Exercice 5 :

Résoudre l'équation différentielle

$$x(1-x)y' - (3x-1)y + x^2(x+1) = 0$$

Etudier les raccordements possibles des solutions en 0 *et* 1.

Solution :

Exercice 6 :

Résoudre les équations différentielles suivantes, avec les conditions initiales données :

(a) $y'' + 9y = x^2 + 1 \qquad y(0) = 0\ ,\ \ y'(0) = 0$

(b) $y'' - 3y' + 2y = xe^x \qquad y(1) = 0\ ,\ \ y'(1) = 0$

(c) $4y'' + 4y' + y = e^{-x/2} \qquad y(0) = 1\ ,\ \ y'(0) = 0$

(d) $y'' - 2y' + 2y = e^x \sin(x) \qquad y(\pi/2) = 0\ ,\ \ y'(\pi/2) = 0$

Solution :

(a) résolution de $y'' + 9y = x^2 + 1 \qquad y(0) = 0\ ,\ \ y'(0) = 0$:
On reconnaît une équa-diff. linéaire du second ordre à coefficients constants $(E)\ :\ y'' + 9y = x^2 + 1$
L'équation caractéristique est : (K) ; $r^2 + 9 = 0$
les racines de (K) sont $r_1 = 3i$ et $r_2 = -3i$
les solutions de l'équation homogène sont les fonctions y_H t.q. : $y_H(x) = C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x)$
le second membre est $x^2 + 1 = P(x)e^{m.x}$ avec $m = 0$ qui n'est pas racine de (K) et P, un polynôme de degré 2.
Donc une solution particulière est de la forme $y_P(x) = ax^2 + bx + c$
Dès lors y_P est solution de $(E) \Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \ 9ax^2 + 9bx + (2a + 9c) = x^2 + 1 \Longleftrightarrow (a, b, c) = \left(\dfrac{1}{9}, 0, \dfrac{7}{81}\right)$
L'ensemble des solutions de (E) est donc :

$$\mathcal{S} = \left\{ y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \longmapsto \frac{x^2}{9} + \frac{7}{81} + C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x)\ /\ (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

De plus, $y(0) = 0 \Longleftrightarrow C_1 = -\dfrac{7}{81}$ et $y'(0) = 0 \Longleftrightarrow 3C_2 = 0$
Donc la solution recherchée est $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \longmapsto \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{7}{81} - \dfrac{7}{81}\cos(3x)$

(b) résolution de $y'' - 3y' + 2y = xe^x \qquad y(1) = 0\ ,\ \ y'(1) = 0$:
On reconnaît une équa-diff. linéaire du second ordre à coefficients constants $(E)\ :\ y'' - 3y' + 2y = xe^x$
L'équation caractéristique est : (K) ; $r^2 - 3r + 2 = 0$
les racines de (K) sont $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$
les solutions de l'équation homogène sont les fonctions y_H t.q. : $y_H(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$
le second membre est $xe^x = P(x)e^{m.x}$ avec $m = 1$ qui est racine simple de (K) et P, un polynôme de degré 1.
Donc une solution particulière est de la forme $y_P(x) = (ax^2 + bx)e^x$
Dès lors y_P est solution de (E)
$\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \ (ax^2 + (b + 4a)x + 2b + 2a)e^x - 3(ax^2 + (b + 2a)x + b)e^x + 2(ax^2 + bx)e^x = xe^x$
$\Longleftrightarrow ((-2ax - b + 2a)e^x = xe^x \Longleftrightarrow (a, b) = \left(-\frac{1}{2}, -1\right)$
L'ensemble des solutions de (E) est donc :

$$\mathcal{S} = \left\{ y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \longmapsto (\tfrac{-x^2}{2} - x + C_1)e^x + C_2 e^{2x}\ /\ (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

De plus, $(y(1), y'(1)) = (0, 0) \Longleftrightarrow \begin{cases} C_1 e + C_2 e^2 = \frac{3e}{2} \\ C_1 e + 2C_2 e^2 = \frac{7e}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow (C_1, C_2) = \left(-\frac{1}{2}, 2e^{-1}\right)$
Donc la solution recherchée est $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \longmapsto (\frac{-x^2}{2} - x - \frac{1}{2})e^x + 2e^{-1}e^{2x}$

(c) résolution de $4y'' + 4y' + y = e^{-x/2} \qquad y(0) = 1\ ,\ \ y'(0) = 0$:
On reconnaît une équa-diff. linéaire du second ordre à coefficients constants $(E)\ :\ 4y'' + 4y' + y = e^{-x/2}$
L'équation caractéristique est : (K) ; $4r^2 + 4r + 1 = 0$
(K) admet une racine double $r_1 = r_2 = -\frac{1}{2}$
les solutions de l'équation homogène sont les fonctions y_H t.q. : $y_H(x) = (C_1 x + C_2)e^{-\frac{x}{2}}$
le second membre est $e^{-x/2} = P(x)e^{m.x}$ avec $m = -1/2$ qui est racine double de (K) et P, un polynôme de degré 0.
Donc une solution particulière est de la forme $y_P(x) = ax^2 e^{-x/2}$
Dès lors y_P est solution de (E)
$\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \ 4(\frac{ax^2}{4} - 2ax + 2a)e^{-x/2} + 4(\frac{-ax^2}{2} + 2ax)e^{-x/2} + ax^2 e^{-x/2} = e^{-x/2}$
$\Longleftrightarrow 8ae^{-x/2} = e^{-x/2} \Longleftrightarrow a = \frac{1}{8}$
L'ensemble des solutions de (E) est donc :

$\mathcal{S} = \left\{ y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ ; \ x \longmapsto (\frac{x^2}{8} + C_1 x + C_2)e^{-\frac{x}{2}} \ / \ (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

De plus, $(y(0), y'(0)) = (0,1) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} C_2 = 1 \\ -\frac{C_2}{2} + C_1 = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow (C_1, C_2) = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$

Donc la solution recherchée est $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ ; \ x \longmapsto (\frac{x^2}{8} + \frac{1}{2}x + 1)e^{-\frac{x}{2}}$

(d) résolution de $y'' - 2y' + 2y = e^x \sin(x) \qquad y(\pi/2) = 0 \ , \ \ y'(\pi/2) = 0$:

On reconnaît une équa-diff. linéaire du second ordre à coefficients constants $(E) \ : \ y'' - 2y' + 2y = e^x \sin(x)$

L'équation caractéristique est : $(K) \ ; \ \ r^2 - 2r + 2 = 0$

les racines (complexes conjuguées) de (K) sont $r_1 = 1 - i$ et $r_2 = 1 + i$

les solutions de l'équation homogène sont les fonctions y_H t.q. : $y_H(x) = C_1 e^x \cos(x) + C_2 e^x \sin(x)$

Considérons alors l'équation complexe $(EC) \ : \ \ y'' - 2y' + 2y = e^{(1+i)x}$

Une solution particulière de (E) sera la partie imaginaire d'une solution particulière de (EC).

le second membre est $e^{(1+i)x} = P(x)e^{m.x}$ avec $m = 1 + i$ qui est racine simple de (K) et P, un polynôme de degré 0.

Donc une solution particulière est de la forme $y_P(x) = axe^{(1+i)x}$

Dès lors y_P est solution de (EC)

$\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \ \ (2iax + 2(1+i)a)e^{(1+i)x} - 2((1+i)ax + a)e^{(1+i)x} + 2axe^{(1+i)x} = e^{(1+i)x}$

$\Longleftrightarrow 2iae^{(1+i)x} = e^{(1+i)x} \Longleftrightarrow a = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}$

Une solution particulière de (EC) est donc telle que $y_P(x) = -\frac{ix}{2}e^{(1+i)x}$ et sa partie imaginaire est telle que $Im(y_P(x)) = -\frac{x}{2}e^x \cos(x)$

L'ensemble des solutions de (E) est donc :

$\mathcal{S} = \left\{ y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ ; \ x \longmapsto (-\frac{x}{2} + C_1)e^x \cos(x) + C_2 e^x \sin(x) \ / \ (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

De plus, $y(\pi/2) = 0 \ , \ \ y'(\pi/2) = 0 \Longleftrightarrow C_2 = 0$ et $C_1 = \frac{\pi}{4}$

Donc la solution recherchée est $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ ; \ x \longmapsto (-\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})e^x \cos(x)$

Exercice 7 :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

(a) $g'' - 3g + 2g = xe^{2x}$

(b) $h'' - 3h' + \lambda h = \sin(x)$ *avec* $\lambda \in \mathbb{R}$.

(c) $y'' - 2y' + \lambda y = e^{2x} + e^x \sin(x)$ *avec* $\lambda \in \mathbb{R}$.

(d) $x'' + 6x' + 9x = \dfrac{e^{-3t}}{\sqrt{t^2 + 1}}$

Solution :

Exercice 8 :

Déterminer l'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ *telles que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \ f'(x) = f(-x)$$

Solution :

Exercice 9 :

Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' - 2ay' + y = e^x$$

en discutant suivant la valeur du paramètre réel a.

Solution :