

1. Résoudre les équations suivantes sur des intervalles que l'on précisera.

(a) $xy' + y = \arctan(x)$

(b) $x' + 2tx = e^{t-t^2}$

(c) $f' + f = \sin(x) + 3 \sin(2x)$

2. Soit l'équation différentielle

$$(E) : y' \cos(t) + y \sin(t) = \cos(t) + t \sin(t)$$

(fonction inconnue y , variable réelle t)

(a) Pour tout entier k , résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $I_k = \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$

(b) Pour tout entier p , résoudre (E) sur $J_p = \left] -\frac{\pi}{2} + 2p\pi; \frac{3\pi}{2} + 2p\pi \right[$ et $K_p = \left] -\frac{3\pi}{2} + 2p\pi; \frac{\pi}{2} + 2p\pi \right[$

(c) Montrer qu'il existe une et une seule solution de (E) sur \mathbb{R} vérifiant la condition $y(0) = 1$.

3. Soit l'équation différentielle

$$(x+1)y' + xy = x^2 - x + 1$$

(a) Trouver une solution polynomiale.

(b) En déduire l'ensemble des solutions sur \mathbb{R} .

(c) Déterminer la solution vérifiant la condition initiale $y(1) = 1$.

4. Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle

$$x^2 y' + y = x^2$$

(on fera apparaître une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer). Déterminer une solution prolongeable par continuité en 0.

5. Résoudre l'équation différentielle

$$x(1-x)y' - (3x-1)y + x^2(x+1) = 0$$

Etudier les raccordements possibles des solutions en 0 et 1.

6. Résoudre les équations différentielles suivantes, avec les conditions initiales données :

(a) $y'' + 9y = x^2 + 1$ $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

(b) $y'' - 3y' + 2y = xe^x$ $y(1) = 0$, $y'(1) = 0$

(c) $4y'' + 4y' + y = e^{-x/2}$ $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

(d) $y'' - 2y' + 2y = e^x \sin(x)$ $y(\pi/2) = 0$, $y'(\pi/2) = 0$

7. Résoudre les équations différentielles suivantes :

(a) $g'' - 3g + 2g = xe^{2x}$

(b) $h'' - 3h' + \lambda h = \sin(x)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

(c) $y'' - 2y' + \lambda y = e^{2x} + e^x \sin(x)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

(d) $x'' + 6x' + 9x = \frac{e^{-3t}}{\sqrt{t^2 + 1}}$

8. Déterminer l'ensemble des fonctions dérivables sur \mathbb{R} telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(-x)$$

9. Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' - 2ay' + y = e^x$$

en discutant suivant la valeur du paramètre réel a .