

Exercice 1 :

Etudier la courbe suivante (Γ_1) $\begin{cases} x = \frac{at^2}{1+t^2} \\ y = \frac{at^3}{1+t^2} \end{cases}$ (cissoïde de Dioclès)

Solution :

Appelons $f : t \mapsto (x(t), y(t)) = (\frac{at^2}{1+t^2}, \frac{at^3}{1+t^2})$ et supposons que $a > 0$.

Le domaine de définition de f est $D_f = \mathbb{R}$.

Symétries : $\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x(-t) = x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{cases}$

On peut étudier f sur \mathbb{R}_+ et compléter la courbe avec une symétrie par rapport à l'axe (Ox) .

x est dérivable sur \mathbb{R} et $\forall t \in \mathbb{R}, x'(t) = \frac{2at}{(1+t^2)^2}$

y est dérivable sur \mathbb{R} et $\forall t \in \mathbb{R}, y'(t) = \frac{at^2(3+t^2)}{(1+t^2)^2}$

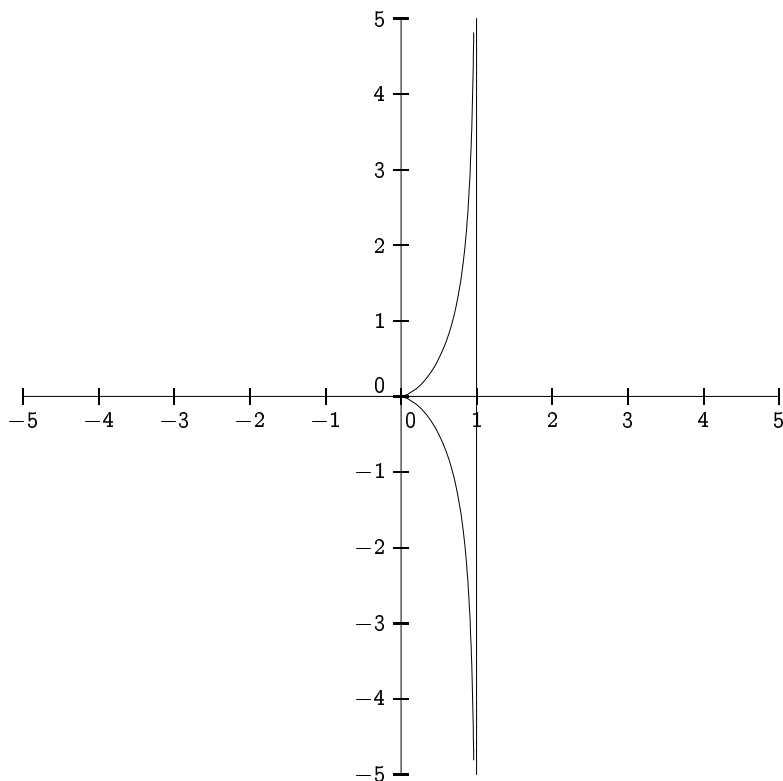
Le tableau de variation de x et y est donc :

t	0	$+\infty$
x'	0	+
x	0	$\nearrow a$
y	0	$\nearrow +\infty$
y'	0	+

Le support de (Γ) admet une asymptote d'équation $x = a$.

$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)} = 0$. Au point singulier $(x(0), y(0)) = (0, 0)$, la courbe admet une tangente horizontale. Vu les variations et la symétrie d'axe (Ox) , le point $(0, 0)$ est un point de rebroussement de première espèce.

La courbe a l'allure qui suit (cas particulier $a = 1$) :



Pour le cas $a < 0$, on utilise que $(x_a(t), y_a(t)) = -(x_{|a|}(t), y_{|a|}(t))$. la courbe correspondant à $a < 0$ est donc symétrique par rapport à l'origine de celle tracée pour $|a|$.

Exercice 2 :

Etudier la courbe suivante (Γ_2) $\begin{cases} x = 2 \cos t - \cos 2t \\ y = 2 \sin t - \sin 2t \end{cases}$

Déterminer l'angle de la tangente avec (Ox) au point de paramètre t
Soit $A(1,0)$. Ecrire l'équation polaire de la courbe dans le repère (A, \vec{i}, \vec{j}) .

Solution :

Appelons $f : t \mapsto (x(t), y(t)) = (2 \cos(t) - \cos(2t), 2 \sin(t) - \sin(2t))$.

Le domaine de définition de f est $D_f = \mathbb{R}$.

Périodicité : x et y sont 2π -périodiques. On peut donc étudier la courbe pour $t \in [-\pi, \pi]$

Symétries : $\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x(-t) = x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{cases}$

On peut étudier f sur $[0, \pi]$ et compléter la courbe avec une symétrie par rapport à l'axe (Ox) .

• x est dérivable sur \mathbb{R} et $\forall t \in \mathbb{R}, x'(t) = -2 \sin(t) + 2 \sin(2t) = 2 \sin(t)(2 \cos(t) - 1)$

Sur l'intervalle $[0, \pi]$ on a $\sin(t) \geq 0$ et $2 \cos(t) - 1 \geq 0 \iff \cos(t) \geq \frac{1}{2} \iff t \in [0, \frac{\pi}{3}]$

Sur l'intervalle $[0, \pi]$ on a $x'(t) \geq 0 \iff t \in [0, \frac{\pi}{3}]$

• y est dérivable sur \mathbb{R} et $\forall t \in \mathbb{R}, y'(t) = 2 \cos(t) - 2 \cos(2t) = 2 \cos(t) - 4 \cos^2(t) + 2 = 2(1 - \cos(t))(1 + 2 \cos(t))$

Sur l'intervalle $[0, \pi]$ on a $1 - \cos(t) \geq 0$ et $1 + 2 \cos(t) \geq 0 \iff \cos(t) \geq \frac{1}{2} \iff t \in [0, \frac{2\pi}{3}]$

Sur l'intervalle $[0, \pi]$ on a $y'(t) \geq 0 \iff t \in [0, \frac{2\pi}{3}]$

Le tableau de variation de x et y est donc :

t	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
x'	0	+	0	-
x	1	$\frac{3}{2}$		-3
y	0		$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	0
y'	0	+	0	-

notons une autre expression des dérivées :

$$x'(t) = 2(\sin(2t) - \sin(t)) = 4 \sin\left(\frac{t}{2}\right) \cos\left(\frac{3t}{2}\right)$$

$$\text{et } y'(t) = -2(\cos(2t) - \cos(t)) = 4 \sin\left(\frac{t}{2}\right) \sin\left(\frac{3t}{2}\right)$$

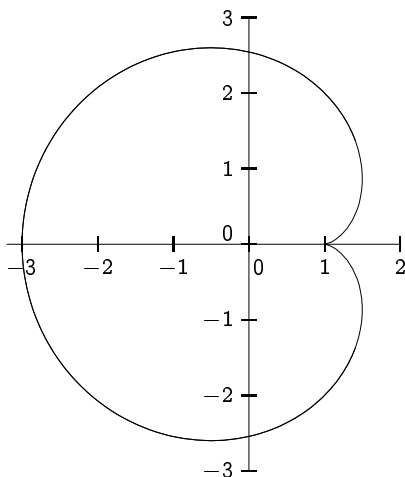
On en déduit que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{y'(t)}{x'(t)} = 0$. Au point singulier

$(x(0), y(0)) = (1, 0)$, la courbe admet une tangente horizontale. Vu les variations et la symétrie d'axe (Ox) , le point $(1, 0)$ est un point de rebroussement de première espèce.

En dehors des points singuliers, (c.a.d. si $t \neq 0 [2\pi]$), la tangente est dirigée par le vecteur $(x'(t), y'(t))$ ou encore ici par le vecteur $\vec{u}\left(\frac{3t}{2}\right) = (\cos(\frac{3t}{2}), \sin(\frac{3t}{2}))$ qui lui est proportionnel.

Au point singulier (c.a.d. si $t \neq 0 [2\pi]$), la tangente est horizontale, elle est donc également dirigée par le vecteur $\vec{u}\left(\frac{3t}{2}\right) = \vec{i}$

Donc l'angle entre l'axe (Ox) et la tangente à Γ_2 est $\frac{3t}{2} [\pi]$. (rappelons qu'un angle entre deux droites n'est défini que modulo π)



Si un point $M(x, y)$ dans le repère initial, alors il est de coordonnées $(X, Y) = (x - 1, y)$ dans le repère (A, \vec{i}, \vec{j}) .

On note ensuite que

$$x(t) = 2 \cos(t) - \cos(2t) = 2 \cos(t) - 2 \cos^2(t) + 1 \text{ et donc } X(t) = x(t) - 1 = \cos(t)2(1 - \cos(t))$$

$$\text{et } Y(t) = y(t) = 2 \sin(t) - \sin(2t) = \sin(t) \cdot 2(1 - \cos(t))$$

$$\text{On note que } t = \theta = \left(\vec{i}, \overrightarrow{OM}(t) \right)$$

Une équation polaire de Γ dans ce nouveau repère est donc $\rho = 2(1 - \cos(\theta))$. Cette courbe est connue et s'appelle la cardioïde.

Exercice 3 :

Etudier la courbe suivante (Γ_3) $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \frac{\sin t}{2 + \cos t} \end{cases}$

Solution :

Appelons $f : t \mapsto (x(t), y(t)) = (\sin(t), \frac{\sin(t)}{2+\cos(t)})$.

$\forall t \in \mathbb{R}, 2 + \cos(t) \neq 0$, donc le domaine de définition de f est $D_f = \mathbb{R}$.

Périodicité : x et y sont 2π -périodiques. On peut donc étudier la courbe pour $t \in [-\pi, \pi]$

Symétries : $\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x(-t) = -x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{cases}$

On peut étudier f sur $[0, \pi]$ et compléter la courbe avec une symétrie par rapport à O l'origine du repère.

• x est dérivable sur \mathbb{R} et $\forall t \in \mathbb{R}, x'(t) = \cos(t)$

Sur l'intervalle $[0, \pi]$ on a $x'(t) \geq 0 \iff t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

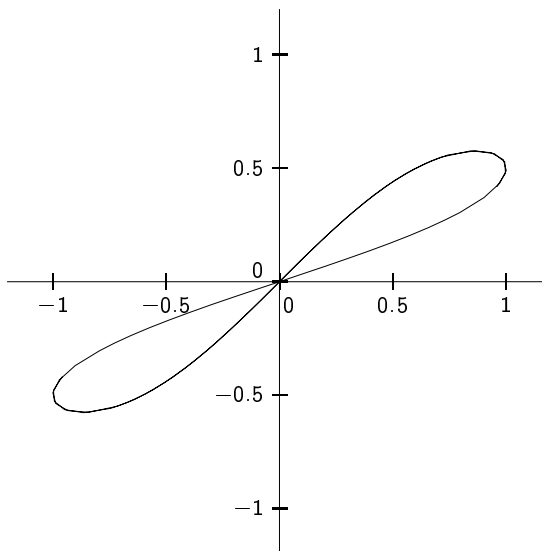
• y est dérivable sur \mathbb{R} et $\forall t \in \mathbb{R}, y'(t) = \frac{1 + 2 \cos(t)}{(2 + \cos(t))^2}$

Sur l'intervalle $[0, \pi]$ on a $1 + 2 \cos(t) \geq 0 \iff \cos(t) \geq \frac{1}{2} \iff t \in [0, \frac{2\pi}{3}]$

Sur l'intervalle $[0, \pi]$ on a $y'(t) \geq 0 \iff t \in [0, \frac{2\pi}{3}]$

On obtient comme tableau de variation et comme allure de courbe :

t	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
x'	+	0	-	
x	0	1	0	0
y	0	$\frac{1}{2}$	0	0
y'		+	0	-



$(x(\frac{\pi}{2}), y(\frac{\pi}{2})) = (1, \frac{1}{2})$ est un point à tangente verticale

$(x(\frac{2\pi}{3}), y(\frac{2\pi}{3})) = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ est un point à tangente horizontale

Exercice 4 :

Etudier la courbe suivante (Γ_4) $\begin{cases} x = \sin(t/2) \\ y = \tan t \end{cases}$
trouver une équation cartésienne

Solution :

Soit $f : t \mapsto (x(t), y(t)) = (\sin(t/2), \tan(t))$. Le domaine de définition de f est $D_f = \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

Périodicité et symétries : $\forall t \in D_f, t + 4\pi \in D_f$ et $f(t + 4\pi) = f(t)$. La fonction f est 4π -périodique. (Il n'y a pas mieux car x n'est que 4π -périodique)

On part avec $t \in [-\pi, 3\pi] \cap D_f$

On note que : $\forall t \in D_f, t + 2\pi \in D_f$ et $\begin{cases} x(t + 2\pi) = -x(t) \\ y(t + 2\pi) = y(t) \end{cases}$.

A ce niveau, on peut restreindre l'étude de f à $t \in D_f \cap [-\pi, \pi]$. Il faudra ensuite effectuer une symétrie du support par rapport à l'axe $(0, y)$

mais également : $\forall t \in D_f, -t \in D_f$ et $\begin{cases} x(-t) = -x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{cases}$

On va étudier f pour $t \in D_f \cap [-\pi, \pi] = [0, \frac{\pi}{2} \cup]\frac{\pi}{2}, \pi]$ et effectuer une symétrie par rapport à l'origine.

- x est dérivable sur D_f et $\forall t \in \mathbb{D}_f, x'(t) = \frac{1}{2} \cos(\frac{t}{2})$
 Sur $[0, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi]$ on a $x'(t) \geq 0$
 - y est dérivable sur D_f et $\forall t \in D_f, y'(t) = \frac{1}{\cos(t)^2}$
 Sur $[0, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi]$ on a $y'(t) > 0$
- on obtient les variations suivantes :

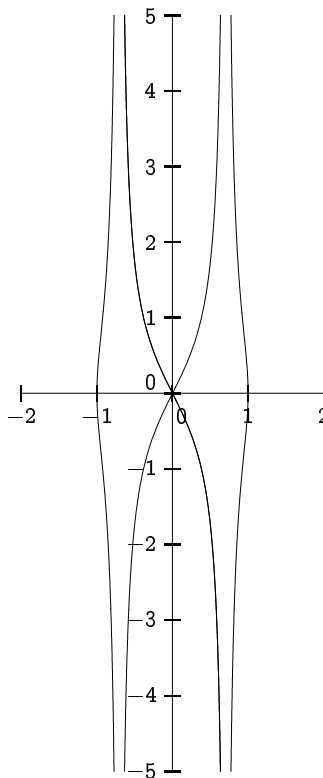
t	0	$\frac{\pi}{2}$	π
x'		+	+
x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
y	0	$+\infty$	$-\infty$
y'		+	+

$$\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} x(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} y(t) = +\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} x(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} y(t) = -\infty$$

Le support de la courbe admet une asymptote d'équation $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Par symétrie, la droite d'équation $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ est également asymptote à la courbe



Dans un premier sens :

$$\text{En posant } x = \sin(t/2), \text{ on a } y = \tan(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)} = \frac{2 \sin(t/2) \cos(t/2)}{1 - 2 \sin^2(t/2)} = \pm \frac{2x\sqrt{1-x^2}}{1-2x^2}$$

$$\text{Si } M(x, y) \text{ est sur la courbe } (\Gamma_4) \text{ alors } (1 - 2x^2)^2 y^2 = 4x^2(1 - x^2)$$

Réciproquement, considérons la courbe d'équation (*) : $(1 - 2x^2)^2 y^2 = 4x^2(1 - x^2)$.

On va montrer que si $M(x, y)$ vérifie (*) alors M appartient au support de (Γ_4) .

Le membre de gauche de (*) étant positif ou nul, on a donc $4x^2(1 - x^2) \geq 0$ et donc $x \in [-1, 1]$.

Plus précisément, on peut remarquer que $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ est impossible car cela donnerai alors $0 = 1$ dans (*).

on pose alors $t_0 = 2 \arcsin(x)$, ce qui nous donne $t_0 \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}[\cup] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi]$

et, comme le point $M(t_0)$ vérifie (*) on a $y = \pm y(t_0)$.

Par les symétries de (Γ_4) établies, on en déduit que $M(x, y)$ appartient au support de (Γ_4) .

Exercice 5 :

$$\text{Etudier la courbe suivante } (\Gamma_5) \begin{cases} x = a \cos^4 t \\ y = a \sin^4 t \end{cases}$$

La tangente au point de paramètre t coupe (Ox) et (Oy) en N et P . Que peut-on dire de $ON + OP$?
 Trouver les équations de la courbe dans le repère déduit de $(0, \vec{i}, \vec{j})$ par rotation d'angle $\pi/4$ autour de O .

En déduire qu'il s'agit d'un arc de parabole.

Solution :

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 ; t \mapsto (x(t), y(t)) = (a \cos^4(t), a \sin^4(t))$ avec $a > 0$ par exemple.

Le domaine de définition de f est $D_f = \mathbb{R}$.

Périodicité : f est π périodique. On peut se restreindre à $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Symétries : $\forall t \in D_f, -t \in D_f$ et $\begin{cases} x(-t) = x(t) \\ y(-t) = y(t) \end{cases}$.

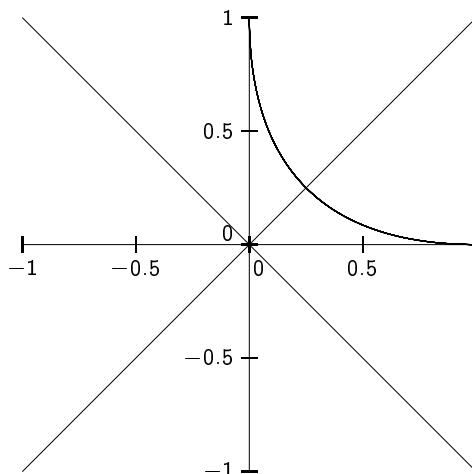
La partie du support correspondant à $t \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$ est identique à celle correspondant à $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. On peut se restreindre à $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

$\forall t \in D_f, \frac{\pi}{2} - t \in D_f$ et $\begin{cases} x(\frac{\pi}{2} - t) = y(t) \\ y(\frac{\pi}{2} - t) = x(t) \end{cases}$

On peut étudier la courbe pour $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$ et effectuer ensuite une symétrie du tracé obtenu par rapport à l'axe $y = x$ afin d'en déduire le support complet de la courbe.

x et y sont dérivables sur \mathbb{R} et $\forall t \in \mathbb{R}, x'(t) = -4a \sin(t) \cos^3(t)$ et $y'(t) = a \cos(t) \sin^3(t)$.

t	0	$\frac{\pi}{4}$
x'	0	-
x	a	$\frac{a}{2}$
y	0	$\frac{a}{2}$
y'	0	+



$x'(0) = 0 = y'(0)$. Le point $A(a, 0)$ est un point singulier.

$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{y'(t)}{x'(t)} = 0$ donc la tangente est horizontale en ce point.

La tangente en un point régulier est dirigée par le vecteur $(x'(t), y'(t))$, mais aussi par le vecteur $(-\cos^2(t), \sin^2(t))$ qui lui est colinéaire.

Une équation cartésienne de la tangente en $M(t)$ est : $\sin^2(t).x + \cos^2(t).y = a \sin^2(t) \cos^2(t)$.

Cette droite rencontre l'axe (Ox) en $N(a \cos^2(t), 0)$ et l'axe (Oy) en $P(0, a \sin^2(t))$.

On note que $ON + OP = a \sin^2(t) + a \cos^2(t) = a$

Montrons que le support de cette courbe (Γ_5) est un arc de parabole.

Partons de $a = a(\cos^2(t) + \sin^2(t))^2 = a \cos^4(t) + a \sin^4(t) + 2a \cos^2(t) \sin^2(t) = x + y + 2a \cos^2(t) \sin^2(t)$

Cela implique : $(2a \cos^2(t) \sin^2(t))^2 = 4xy = (a - x - y)^2$

Tout point $M(x(t), y(t))$ appartient à la courbe d'équation cartésienne (*) : $4xy = (a - x - y)^2$

Effectuons, par rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$, un changement de repère : on pose $\mathcal{R}' = (0, \vec{u}(\frac{\pi}{4}), \vec{v}(\frac{\pi}{4}))$.

Soit M dont les coordonnées sont (x, y) dans l'ancien repère et (X, Y) dans le nouveau repère.

On sait qu'on a les relations : $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}X - \frac{1}{\sqrt{2}}Y \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y \end{cases}$...qu'on utilise en remplaçant dans (*), ce qui nous fait :

(**) : $2(X^2 - Y^2) = (a - \sqrt{2}X)^2 = a^2 - 2\sqrt{2}X + 2X^2$

En simplifiant, on obtient : (**) $\iff X = \frac{Y^2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}a^2$

ce qu'on reconnaît comme l'équation d'une parabole.

Tout point M de (Γ_5) appartient donc à cette parabole. Mais la réciproque est fautive : on voit sur la figure que (Γ_5) n'est qu'un arc de parabole.

Exercice 6 :

Etudier la courbe suivante (Γ_6) $\begin{cases} x = t^3(3t - 2) \\ y = t(t - 1) \end{cases}$
 Préciser les points de rebroussement et les branches infinies

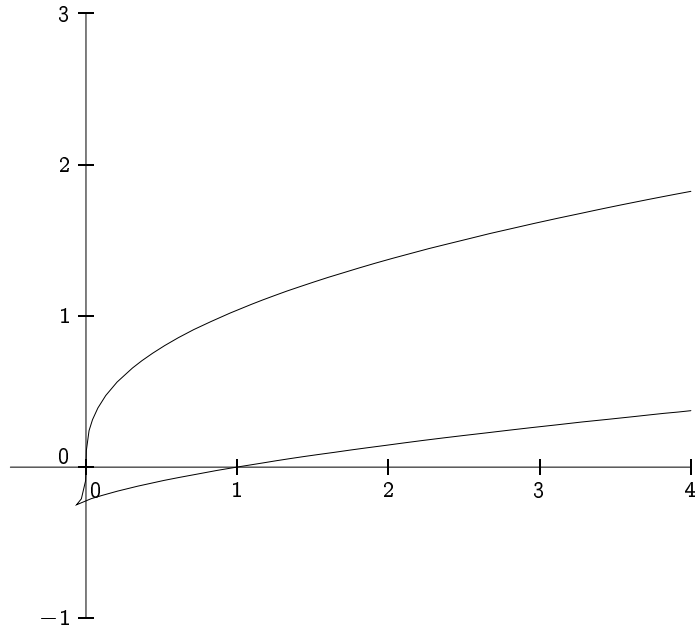
Solution :

$D_f = \mathbb{R}$ et on n'observe aucune symétrie particulière.

x et y sont dérivables sur \mathbb{R} et $x'(t) = 6t^2(2t - 1)$ et $y'(t) = 2t - 1$. On obtient alors le tableau :

Posons $f : t \mapsto (x(t), y(t))$. f est définie et dérivable sur \mathbb{R} , non périodique avec aucune symétrie apparente. $x'(t) = 6t^2(2t - 1)$ et $y'(t) = 2t - 1$.

t	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
x'	$-$	0	$-$	$+$
x	$+\infty$		$-\frac{1}{16}$	$+\infty$
y	$+\infty$		$-\frac{1}{4}$	$+\infty$
y'	$-$	$-$	0	$+$



Au voisinage de $+\infty$: $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = +\infty$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = +\infty$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$.

La courbe présente une branche parabolique de direction asymptotique l'axe (Ox) .

Au voisinage de $-\infty$: $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = +\infty$, $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = +\infty$ et $\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$.

La courbe présente une branche parabolique de direction asymptotique l'axe (Ox) .

Le point de paramètre $t = 0$, qui est de coordonnées $(0, 0)$ est un point à tangente verticale.

Il n'y a qu'un point singulier (ou stationnaire) : pour $t = \frac{1}{2}$ le point $A(-\frac{1}{16}, -\frac{1}{4})$ où l'on a $x' = y' = 0$.

Or $\lim_{t \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{2}{3}$ donc la tangente est dirigée en ce point par le vecteur $\vec{u}(3, 2)$.

Ce qui suit fait appel à un chapitre (développements limités) de la fin d'année : j'en donne une version "adaptée"

On pose $t = \frac{1}{2} + h$ et on aura t qui tend vers $\frac{1}{2}$ si et seulement si h tend vers 0.

Alors $x(t) = x(\frac{1}{2} + h) = -\frac{1}{16} + \frac{3}{2}h^2 + 4h^3 + 3h^4$ et $y(t) = y(\frac{1}{2} + h) = -\frac{1}{4} + h^2$.

Ce qu'on peut aussi écrire sous la forme : $\begin{pmatrix} x(\frac{1}{2} + h) \\ y(\frac{1}{2} + h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{16} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} + h^2 \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + h^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + h^4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

On note que, pour h voisin de 0, les termes de cette somme sont de plus en plus petits

Le premier terme nous indique les coordonnées du point A

Les deux premiers termes nous indiquent une représentation paramétrique de la tangente en A : $\begin{cases} X = -\frac{1}{16} + \frac{3}{2}\lambda \\ Y = -\frac{1}{4} + \lambda \end{cases}$

Comme $\lambda = h^2 \geq 0$, la courbe ne longe qu'une demi-tangente : on a un point de rebroussement.

Le terme suivant (qui est non colinéaire à la direction de la tangente) nous indique si la courbe est d'un côté ou de l'autre de la demi-tangente.

Ici $h^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est tel que h^3 peut être positif ou négatif lorsque h est proche de 0 :

Le point A est donc un point de rebroussement de première espèce.

Exercice 7 :

Etudier la courbe suivante (Γ_7) $\begin{cases} x = t + \frac{a}{t^2} \\ y = t^2 + \frac{b}{t} \end{cases}$

Trouver une relation entre a et b pour que la courbe admette un point de rebroussement
Déterminer le lieu de ces points quand a varie

Solution :

Si $a = 0$, alors il n'y a pas de point de rebroussement car $x'(t) = 1$. On va donc choisir $a \neq 0$ dans cet exercice.
Le domaine de définition de la courbe est $D_f = \mathbb{R}^*$. On ne remarque aucune symétrie particulière.

$x'(t) = 1 - \frac{2a}{t^3}$ et $y'(t) = 2t - \frac{b}{t^2}$.

Il existe un point de rebroussement $\iff \exists t \in \mathbb{R}^* \text{ t.q. } (x'(t), y'(t)) = (0, 0)$

$\iff \exists t \in \mathbb{R}^* \text{ t.q. } 1 - \frac{2a}{t^3} = 0 = 2t - \frac{b}{t^2} \iff \exists t \in \mathbb{R}^* \text{ t.q. } 2t^3 = b \text{ et } t^3 = 2a$

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un point de rebroussement est $b = 4a \in \mathbb{R}^*$.
dans ce cas, il n'y a qu'un seul point de rebroussement et il est de paramètre $t = \sqrt[3]{2a}$

L'étude de la courbe (Γ_7) dans le cas général $4a \neq b$ ne présente pas de difficulté mais est un peu longue.

En effet, x' change de signe en 0 et $\sqrt[3]{2a}$, et y' change de signe en $\sqrt[3]{\frac{b}{2}}$ ce qui fait six cas différents!
Nous ne ferons que l'étude des cas $4a = b > 0$ et $4a = b < 0$.

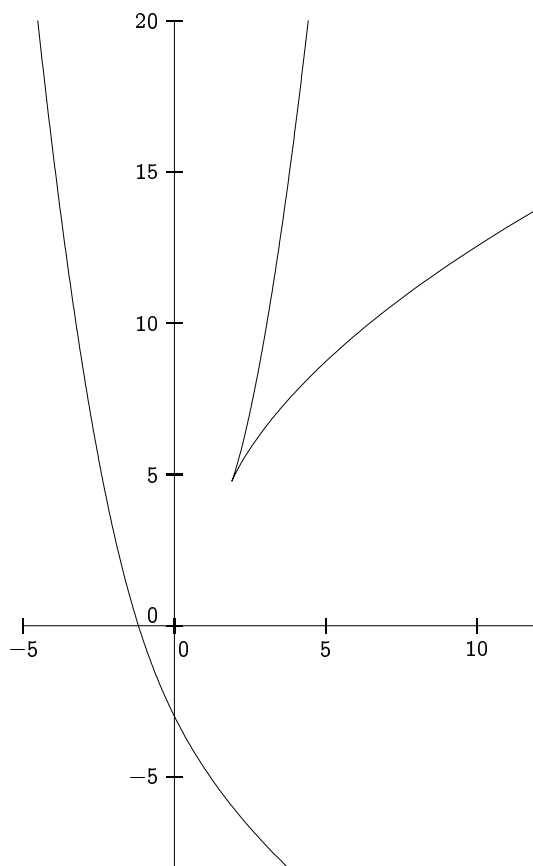
premier cas $4a = b > 0$. Nous noterons $t_0 = \sqrt[3]{2a} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{3}}$

On a alors que $x'(t) = 1 - \frac{2a}{t^3} = \frac{t^3 - t_0^3}{t^3}$ et $y'(t) = 2t - \frac{b}{t^2} = 2\frac{t^3 - t_0^3}{t^2}$.

t	$-\infty$	0	t_0	$+\infty$
x'	+		- 0 +	
x	$-\infty$ ↗ $+\infty$	$+\infty$ ↘ $3 \cdot 2^{-\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{3}}$		$+\infty$
y	$+\infty$ ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ $3 \cdot 2^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{2}{3}}$		$+\infty$
y'	-		- 0 +	

Au point singulier : $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y'(t)}{x'(t)} = 2t_0$ La tangente est dirigée par le vecteur $\vec{T}(1, 2t_0)$

Les variations de x et de y (qui passent de décroissant à croissant simultanément en t_0) nous prouve qu'on a un point de rebroussement. Ayant $\frac{y'(t)}{x'(t)} = 2t$, on en déduit que, au voisinage de $M(t_0)$, la pente des tangentes est un peu moins forte avant t_0 et un peu plus forte après t_0 . La courbe est en dessous de la tangente en $M(t_0)$ si $t < t_0$ et au dessus si $t > t_0$: $M(t_0)$ est un point de rebroussement de première espèce.



cas $a = 1$

Etude des branches infinies :

- si t est au voisinage de $+\infty$ alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = +\infty, \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = +\infty \text{ et } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = +\infty.$$

La courbe présente une branche parabolique de direction asymptotique l'axe (Oy)

- si t est au voisinage de $+\infty$ alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = -\infty, \lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = +\infty \text{ et } \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = -\infty.$$

La courbe présente une branche parabolique de direction asymptotique l'axe (Oy)

- si t est au voisinage de 0^+ alors

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) = +\infty, \lim_{t \rightarrow 0^+} y(t) = +\infty \text{ et } \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{y(t)}{x(t)} = 0.$$

La courbe présente une branche parabolique de direction asymptotique l'axe (Ox)

- si t est au voisinage de $+\infty$ alors

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} x(t) = +\infty, \lim_{t \rightarrow 0^-} y(t) = -\infty \text{ et } \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{y(t)}{x(t)} = 0.$$

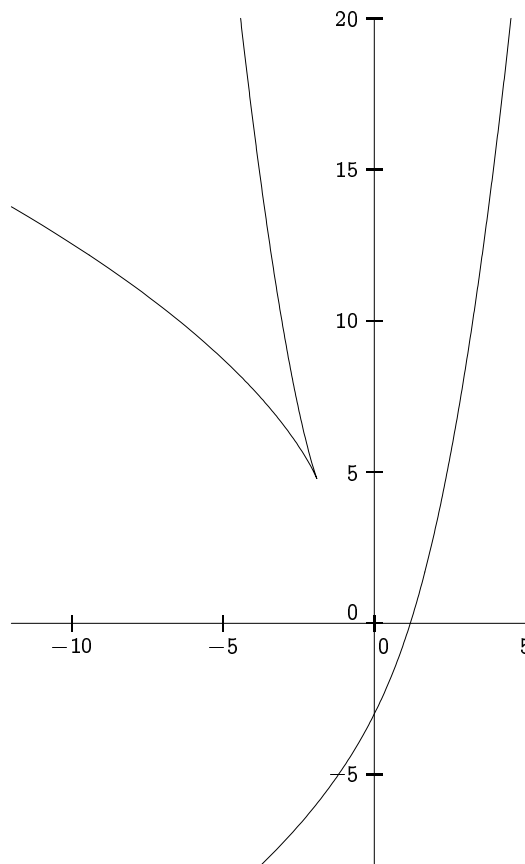
La courbe présente une branche parabolique de direction asymptotique l'axe (Ox)

deuxième cas $4a = b < 0$.

Si on change t en $-t$ et (a, b) en $(-a, -b)$ dans les relations, le point obtenu est tel que $X = -x$ et $Y = y$.

Le point $M(t)$ sur la courbe $\Gamma(a, 4a)$ est symétrique par rapport à l'axe (Oy) au point $M(-t)$ sur la courbe $\Gamma(-a, -4a)$.

Les courbes $\Gamma(a, 4a)$ et $\Gamma(-a, -4a)$ sont donc symétriques l'une de l'autre par rapport à l'axe (Oy).



Exercice 8 :

Etudier la courbe suivante (Γ_8)

$$\begin{cases} x = \frac{1}{t+1} + \frac{1}{t} \\ y = \frac{1}{t-1} + \frac{1}{t} \end{cases}$$

Montrer qu'il y a un point double.

Etudier les asymptotes et leurs positions par rapport à la courbe.

Solution :

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 ; t \mapsto \left(\frac{1}{t+1} + \frac{1}{t}, \frac{1}{t-1} + \frac{1}{t} \right)$

Le domaine de définition de f est $\mathbb{R} - \{-1, 0, +1\}$

f n'est pas périodique.

Symétrie : On note que $\forall t \in D_f, -t \in D_f$ et $\begin{cases} x(-t) = -y(t) \\ y(-t) = -x(t) \end{cases}$

Le support de la courbe est symétrique par rapport à l'axe $y = -x$ (la deuxième bissectrice du repère). On étudie la courbe pour $t \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

- x est dérivable sur D_f et $x'(t) = -\frac{1}{(t+1)^2} - \frac{1}{t^2}$. On remarque que $\forall t \in D_f, x'(t) < 0$
- y est dérivable sur D_f et $y'(t) = -\frac{1}{(t-1)^2} - \frac{1}{t^2}$. On remarque que $\forall t \in D_f, y'(t) < 0$

t	0	1	$+\infty$
x'		-	-
x	$+\infty$	$\frac{3}{2}$	0
y	$+\infty$	$-\infty$	0
y'		-	-

$\lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t), y(t)) = (0, 0)$: l'origine est un point limite de la courbe.

$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y'(t)}{x'(t)} = 1$ donc il y a une tangente (à la limite) qui est de coefficient directeur égal à 1.

$\lim_{t \rightarrow 1^-} (x(t), y(t)) = (\frac{3}{2}^+, -\infty)$ et $\lim_{t \rightarrow 1^+} (x(t), y(t)) = (\frac{3}{2}^-, +\infty)$.

Donc la droite d'équation $x = \frac{3}{2}$ est asymptote à la courbe, la courbe étant à droite de l'asymptote dans le premier cas et à gauche dans le second cas.

Par symétrie, on a une asymptote d'équation $y = -\frac{3}{2}$.

$\lim_{t \rightarrow 0^+} (x(t), y(t)) = (+\infty, +\infty)$. On obtient d'abord $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{1 + \frac{t}{t-1}}{1 + \frac{t}{t+1}} = 1$

et ensuite $\lim_{t \rightarrow 0^+} y(t) - x(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2}{t^2-1} = -2^-$

La courbe admet, lorsque t tend vers 0^+ une droite asymptote d'équation $y = x - 2$ et la courbe est "en dessous" de cette droite au voisinage de $t = 0^+$.

Pour des raisons de symétrie, on retrouve cette même asymptote lorsque t tend vers 0^- .

Recherche de(s) point(s) double(s) :

On cherche deux paramètres t_1 et t_2 tels que $t_1 \neq t_2$ et $M(t_1) = M(t_2)$ soit encore $\begin{cases} x(t_1) = x(t_2) \\ y(t_1) = y(t_2) \end{cases}$

D'une part $x(t_1) = x(t_2) \iff \frac{1}{t_1+1} + \frac{1}{t_1} = \frac{1}{t_2+1} + \frac{1}{t_2}$, et en multipliant le tout par $t_1 t_2 (t_1+1)(t_2+1)$

$x(t_1) = x(t_2) \iff (t_2+1)t_1 t_2 + (t_1+1)(t_2+1)t_2 = (t_1+1)t_1 t_2 + (t_1+1)(t_2+1)t_1 \iff 2t_1 t_2^2 + t_2^2 + t_2 = 2t_2 t_1^2 + t_1^2 + t_1$

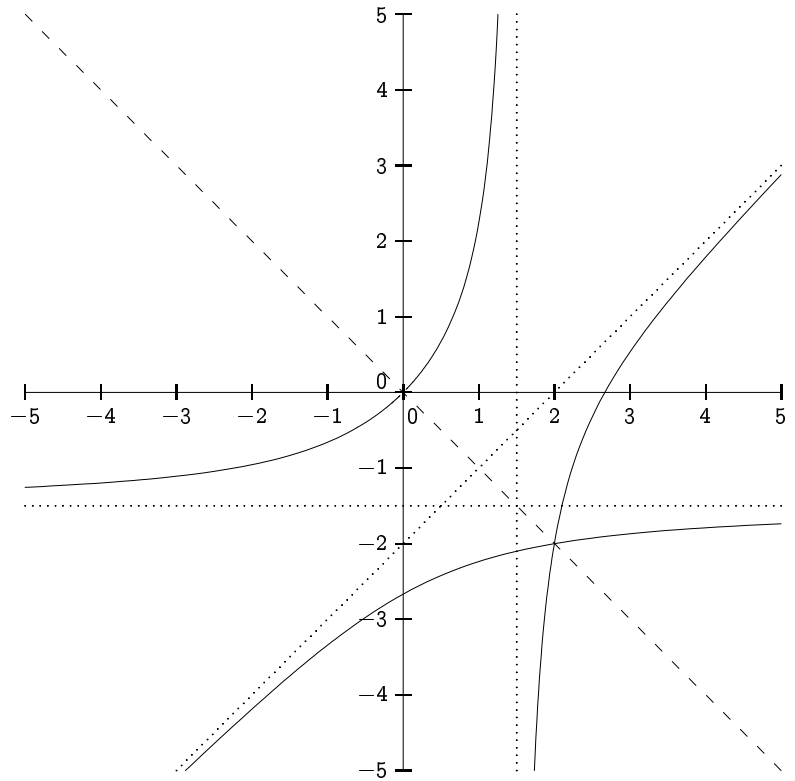
$x(t_1) = x(t_2) \iff (t_2 - t_1)(2t_1 t_2 + t_1 + t_2 + 1) = 0$ (1)

D'autre part $y(t_1) = y(t_2) \iff \frac{1}{t_1-1} + \frac{1}{t_1} = \frac{1}{t_2-1} + \frac{1}{t_2}$, et en multipliant le tout par $t_1 t_2 (t_1-1)(t_2-1)$

$y(t_1) = y(t_2) \iff (t_2-1)t_1 t_2 + (t_1-1)(t_2-1)t_2 = (t_1-1)t_1 t_2 + (t_1-1)(t_2-1)t_1 \iff 2t_1 t_2^2 - t_2^2 + t_2 = 2t_2 t_1^2 - t_1^2 + t_1$

$y(t_1) = y(t_2) \iff (t_2 - t_1)(2t_1 t_2 - t_1 - t_2 + 1) = 0$ (2)

On obtient le système $\begin{cases} 2t_1 t_2 + t_1 + t_2 + 1 = 0 \\ 2t_1 t_2 - t_1 - t_2 + 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} t_1 + t_2 = 0 \\ 2t_1 t_2 + 1 = 0 \end{cases}$



$$\Leftrightarrow (t_1, t_2) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ ou } (t_1, t_2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

On a donc un point double $M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = M\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ qui est de coordonnées $(x\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right), y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)) = (2, -2)$

Exercice 9 :

Etudier la courbe suivante (Γ_9) $\begin{cases} x = \frac{3}{t^2 - 2t} \\ y = \frac{t^2 - 3}{t} \end{cases}$ Etudier les éventuelles asymptotes et les points doubles

Solution :

Exercice 10 :

Etudier la courbe suivante (Γ_{10}) $\begin{cases} x = \frac{t+1}{t^3} \\ y = \frac{t-1}{t^2} \end{cases}$

Etudier les branches infinies et la concavité.

Solution :

Exercice 11 :

Soit λ un réel donné; on note $\mathcal{E}(\lambda)$ la courbe plane paramétrée : $x(t) = t + \frac{\lambda - \text{sh}(t)}{\text{ch}(t)}$; $y(t) = \frac{1 + \lambda \text{sh}(t)}{\text{ch}(t)}$

(t variant dans \mathbb{R})

- Quelle relation géométrique y-a-t-il entre $\mathcal{E}(\lambda)$ et $\mathcal{E}(-\lambda)$?
- Quel est le lieu (Γ) des points des courbes $\mathcal{E}(\lambda)$ où la tangente à $\mathcal{E}(\lambda)$ est parallèle à (Oy) ? (λ décrit \mathbb{R})
- Quel est le lieu (Θ) des points des courbes $\mathcal{E}(\lambda)$ qui ne sont pas des points réguliers ? (λ décrit \mathbb{R})
- Construire les graphes de $\mathcal{E}(0)$, $\mathcal{E}(2)$, (Γ) et (Θ) .

Solution :

Exercice 12 :

Paramétrer la courbe (L) (Lemniscate de Bernoulli) d'équation $(x^2 + y^2)^2 - 4xy = 0$ en la coupant par un cercle C de centre $c(t, 0)$ tangent à l'axe des ordonnées (t réel). Tracer (L) .

Solution :

Exercice 13 :

Cycloïde

Un cercle roule sans glisser sur une droite D . Soit Γ la courbe décrite par un point du cercle. On suppose qu'à l'instant $t = 0$ le point se trouve en O . On choisit un repère orthonormé direct tel que $(xx') = D$. Montrer que des équations paramétriques de Γ sont :

$$\begin{cases} x = R(t - \sin t) \\ y = R(1 - \cos t) \end{cases} \quad . \text{ Tracer } \Gamma .$$

Solution :