

Exercice 1 :

On appelle φ l'application du plan euclidien privé de son origine O dans lui-même définie par :

$$(M' = \varphi(M)) \iff \left((\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = 0 [2\pi] \text{ et } OM \cdot OM' = 1 \right)$$

- (a) Dans \mathbb{C}^* , on note z l'affixe de M et $z' = h(z)$ celle de M' . Expliciter $h(z)$.
- (b) En utilisant leurs équations polaires, étudier l'image par φ d'une droite, d'un cercle de centre O ou d'un cercle passant par l'origine.
- (c) En utilisant les coordonnées cartésiennes, étudier l'image par φ d'un cercle de centre $\neq O$ et ne passant pas par l'origine.
- (d) Quelles sont les droites globalement invariantes par φ , les cercles globalement invariants ?

Solution :

- (a) Si M est de coordonnées polaires (ρ, θ) alors M' est de coordonnées polaires $(\frac{1}{\rho}, \theta)$.

On en déduit que si M est d'affixe $z = \rho e^{i\theta}$, alors M' est d'affixe $z' = \frac{1}{\rho} e^{i\theta} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

$$\text{Donc } h(z) = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

- (b) Soit D une droite du plan :

- *premier cas : D passe par l'origine*

Son équation polaire est $\theta = \theta_0$ (constante). En notant $D^* = D - \{O\}$, on a $\varphi(D^*) = D^*$.

En effet, tout point M tel que $\theta = \theta_0$ a une image qui vérifie $\theta = \theta_0$. Et, réciproquement, tout point $M(\rho, \theta_0) \in D^*$ admet un antécédent qui est $N(\frac{1}{\rho}, \theta_0)$ et qui appartient à D^*

- *deuxième cas : D ne passe pas par l'origine*

Son équation polaire est du type $\rho = \frac{-c}{a \cos(\theta) + b \sin(\theta)}$

Tout point $M \in D$ a une image $\varphi(M)$ dont les coordonnées polaires (ρ', θ') vérifient

$$\theta' = \theta \text{ et } \rho' = \frac{1}{\rho} = \frac{-a}{c} \cos(\theta) + \frac{-b}{c} \sin(\theta).$$

On en déduit que $\varphi(M)$ appartient au cercle C de centre $\Omega(\frac{-a}{2c}, \frac{-b}{2c})$ passant par l'origine.

Réciproquement, tout point de C , différent de l'origine, est de coordonnées polaires (r, α) avec $r \neq 0$ admet un antécédent dont les coordonnées polaires (ρ, θ) vérifient $\theta = \alpha$ et $\rho = \frac{1}{r} = \frac{-c}{a \cos(\theta) + b \sin(\theta)}$ et qui appartient à D .

A ce niveau on peut noter que $\varphi \circ \varphi = Id$: l'application identique du plan privé de l'origine. On remarque ainsi que φ est bijective et $\varphi^{-1} = \varphi$.

Conséquence : l'image d'un cercle passant par l'origine (mais privé de O) est une droite ne passant pas par l'origine.

Autre résultat : l'image du cercle de centre O et de rayon R est le cercle de centre O et de rayon $\frac{1}{R}$.

- (c) quelle est l'image d'un cercle dont le centre n'est pas O et ne passant pas par l'origine ?

N'ayant pas d'équation polaire disponible pour répondre à cette question, utilisons les coordonnées cartésiennes.

$$M'(X, Y) = \varphi(M(x, y)) \iff (X, Y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2} \right)$$

Soit $M \in C$ d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ avec $c = a^2 + b^2 - R^2$. Alors, sachant que $\varphi = \varphi^{-1}$, on a $M' = \varphi(M) \iff \varphi(M') = M$.

$$\text{on en déduit que } \left(\frac{X}{X^2+Y^2} \right)^2 + \left(\frac{Y}{X^2+Y^2} \right)^2 - 2a \frac{X}{X^2+Y^2} - 2b \frac{Y}{X^2+Y^2} + c = 0$$

$$\text{soit encore } \frac{1}{X^2+Y^2} - 2a \frac{X}{X^2+Y^2} - 2b \frac{Y}{X^2+Y^2} + c = 0$$

$$\text{ce qui équivaut à } 1 - 2aX - 2bY + c(X^2 + Y^2) = 0$$

$$\text{le cercle ne passe pas par l'origine, on a } c \neq 0 \text{ et } X^2 + Y^2 - 2\frac{a}{c}X - 2\frac{b}{c}Y + \frac{1}{c} = 0$$

$$\text{ce qui donne } (X - \frac{a}{c})^2 + (Y - \frac{b}{c})^2 + \frac{c-a^2-b^2}{c^2} = 0$$

$$\iff (X - \frac{a}{c})^2 + (Y - \frac{b}{c})^2 = \frac{R^2}{c^2}$$

M' est donc un point qui appartient au cercle de centre $(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}) \neq (0, 0)$, de rayon $\frac{R}{|c|}$. C'est un cercle qui ne passe pas par l'origine car $R \neq 0$.

Réciproquement, comme φ est bijective et que $\varphi^{-1} = \varphi$, tout point M' de ce cercle est bien l'image d'un point $M = \varphi(M')$ appartenant au cercle C .

Conclusion : l'image par φ d'un cercle dont le centre n'est pas O et ne passant pas par l'origine est un cercle dont le centre n'est pas O et ne passant pas par l'origine.

remarques :

- on obtient le même cercle si et seulement si $c = 1 \iff a^2 + b^2 = R^2 + 1$.
- en général, l'image du centre du cercle C par φ n'est pas le centre du cercle $\varphi(C)$

- (d) D'après ce qui précède, les droites globalement invariantes par φ sont les droites passant par l'origine. les cercles globalement invariants par φ sont les cercles de centre $\Omega(a, b)$ de rayon R tels que $a^2 + b^2 = R^2 + 1$ (ce qui inclus le cas du cercle trigonométrique)

Exercice 2 :

Etudier la courbe suivante et la tracer : $\rho = \frac{\sin(3\theta)}{\sin(\theta)}$

Solution :

La fonction $\rho : \theta \mapsto \frac{\sin(3\theta)}{\sin(\theta)}$ est définie sur $\mathbb{R} - \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.

- $\forall \theta \in D_\rho, \theta + \pi \in D_\rho$ et $\rho(\theta + \pi) = \frac{\sin(3\theta + 3\pi)}{\sin(\theta + \pi)} = \frac{\sin(3\theta)}{\sin(\theta)} = \rho(\theta)$.

La fonction ρ est π -périodique. Donc la courbe $\vec{f} : \theta \mapsto \overrightarrow{OM}(\theta) = \rho(\theta) \cdot \vec{u}(\theta)$ est 2π périodique, et son support est symétrique par rapport à l'origine. On restreint l'étude à $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, 0[\cup]0, \frac{\pi}{2}]$.

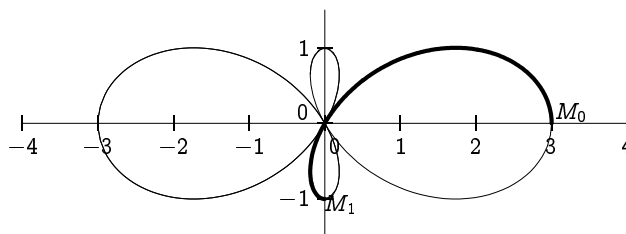
- $\forall \theta \in D_\rho, -\theta \in D_\rho$ et $\rho(-\theta) = \frac{-\sin(3\theta)}{-\sin(\theta)} = \rho(\theta)$ donc le support de la courbe est symétrique par rapport à l'axe (Ox) et on restreint l'étude à $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}]$. On complétera ensuite le tracé par symétrie par rapport à (Ox) puis par symétrie par rapport à O .

Remarquons que : $\sin(3\theta) = \text{Im}(e^{i3\theta}) = \text{Im}((e^{i\theta})^3) = \text{Im}((\cos(\theta) + i \sin(\theta))^3) = 3 \cos^2(\theta) \sin(\theta) - \sin^3(\theta)$

Ce qui nous donne $\forall \theta \in D_\rho, \rho(\theta) = 3 \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 2 \cos^2(\theta) + \cos(2\theta) = 2 \cos(2\theta) + 1$

On en déduit alors que $\forall \theta \in]0, \frac{\pi}{2}]$, $\rho'(\theta) = -2 \sin(2\theta)$ et $\forall \theta \in]0, \frac{\pi}{2}]$, $\rho'(\theta) \leq 0$.

θ	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
ρ'		-	- 0
ρ	3	0	-1



La portion du tracé correspondant à $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}]$ est en gras.

- pour $\theta \rightarrow 0$, à la limite $\rho(\theta) \rightarrow 3$ et $\rho'(\theta) \rightarrow 0$. On a donc un point limite $M_0(3, 0)$ tel que $\overrightarrow{OM_0} = 3\vec{u}(0)$ avec une tangente orthogonale à $\vec{u}(0) = \vec{i}$ c'est à dire verticale.
- lorsque $\theta \in]0, \frac{\pi}{3}[$, on a $\rho(\theta) > 0$ et donc la courbe est dans le secteur angulaire défini par ces angles.
- en $\theta = \frac{\pi}{3}$, on a $\rho(\theta) = 0$. La courbe passe par l'origine et la tangente est dirigée par le vecteur $\vec{u}(\frac{\pi}{3})$. (c'est toujours le cas lorsque la courbe passe par l'origine)
- lorsque $\theta \in]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}[$, on a $\rho(\theta) < 0$ et donc la courbe est dans le secteur angulaire opposé à celui défini par ces angles.
- en $\theta = \frac{\pi}{2}$, on a $\rho(\theta) = -1$ et $\rho'(\theta) = 0$. Le point M_1 tel que $\overrightarrow{OM_1} = -1 \cdot \vec{u}(\frac{\pi}{2})$ est de coordonnées cartésiennes $(0, -1)$ et la courbe a une tangente orthogonale à $\vec{u}(\frac{\pi}{2})$ en ce point (c'est donc une tangente horizontale).

Exercice 3 :

Etudier la courbe suivante et la tracer : $\rho = \cos(\frac{3}{2}\theta) + \frac{\sqrt{2}}{2}$

Solution :

La fonction $\rho : \theta \mapsto \cos\left(\frac{3}{2}\theta\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}$, est définie sur \mathbb{R} , et $\frac{4\pi}{3}$ -périodique.

La courbe $\vec{f} : \theta \mapsto \overrightarrow{OM}(\theta) = \rho(\theta) \cdot \overrightarrow{u}(\theta)$ est 4π périodique. On a $\overrightarrow{OM}\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) = \rho(\theta) \overrightarrow{u}\left(\frac{4\pi}{3}\right)$.

Le support de la courbe est invariant par rotation d'angle $\frac{4\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} [2\pi]$.

En effet, lorsqu'on transforme par rotation d'angle $\frac{4\pi}{3}$ la portion du support correspondant à $\theta \in \left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$, on obtient la portion du support correspondant à $\theta \in \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{6\pi}{3}\right]$, puis, par une autre rotation, celle correspondant à $\theta \in \left[\frac{6\pi}{3}, \frac{10\pi}{3}\right]$. En notant que $\frac{10\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} + 4\pi$, on vérifie qu'on récupère ainsi tout le tracé à partir de $\theta \in \left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$ et avec deux rotations.

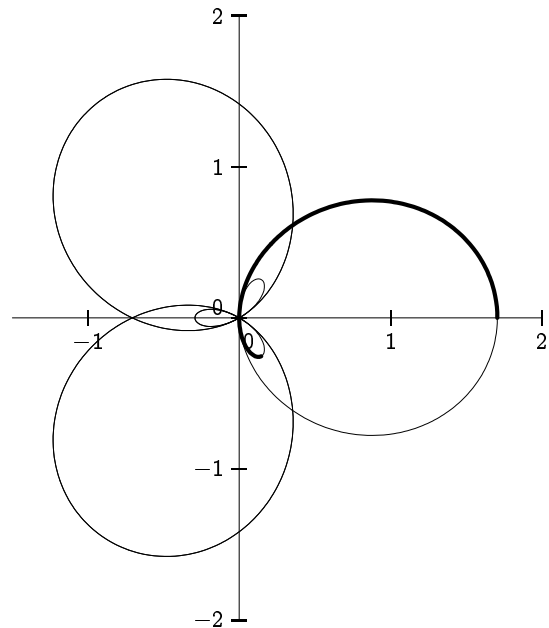
$\forall \theta \in D_\rho$, $-\theta \in D_\rho$ et $\rho(-\theta) = \rho(\theta)$ donc le support de la courbe est symétrique par rapport à l'axe (Ox) et on restreint l'étude à $\theta \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$.

Par la symétrie d'axe (Ox) , on en déduira le tracé correspondant à $\theta \in \left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$, puis par deux rotations successives d'angle $\frac{4\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} [2\pi]$, on obtiendra le support entier.

ρ est dérivable sur \mathbb{R} et $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\rho'(\theta) = -\sin\left(\frac{3}{2}\theta\right)$

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
ρ'	0	-	-
ρ	$1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$
ρ		+	-

- en $\theta = 0$, $\rho(0) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\rho'(0) = 0$. La courbe a une tangente verticale (orthogonale à $\overrightarrow{u}(0)$).
- lorsque $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\rho(\theta) > 0$ et la courbe est dans le secteur angulaire défini par ces angles.
- en $\theta = \frac{\pi}{2}$, la courbe passe par l'origine, et donc la tangente est dirigée par $\overrightarrow{u}\left(\frac{\pi}{2}\right)$
- lorsque $\theta \in]\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}[$, $\rho(\theta) < 0$ et la courbe est dans le secteur angulaire opposé à celui défini par ces angles.
- en $\theta = \frac{2\pi}{3}$, on a $\rho\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\rho'\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 0$. La courbe a une tangente orthogonale à $\overrightarrow{u}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.



La portion du tracé correspondant à $\theta \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$ est en gras.

Exercice 4 :

Etudier la courbe suivante et la tracer : $\rho = a(2 \cos(\theta) - \cos(2\theta))$
trouver les coordonnées du (ou des) point(s) double(s)

Solution :

Lorsque $a < 0$, le support de la courbe est symétrique par rapport à l'origine de celui obtenu avec $|a| = -a$. Supposons donc $a > 0$.

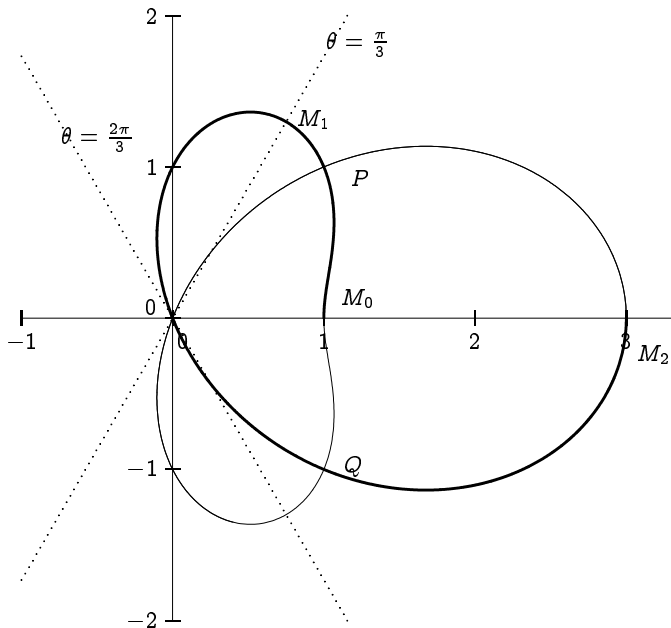
La fonction $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $\theta \mapsto a(2 \cos(\theta) - \cos(2\theta))$ est 2π périodique.

La courbe $\vec{f} : \theta \mapsto \overrightarrow{OM}(\theta) = \rho(\theta) \cdot \overrightarrow{u}(\theta)$ est 2π périodique.

$\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\rho(-\theta) = \rho(\theta)$ donc le support de la courbe est symétrique par rapport à l'axe (Ox) . On va étudier la courbe pour $\theta \in [0, \pi]$, et en déduire le tracé complet par symétrie par rapport à l'axe (Ox) .

ρ est dérivable sur \mathbb{R} et $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\rho'(\theta) = a(-2 \sin(\theta) + 2 \sin(2\theta)) = 4a \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)$

θ	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
ρ'	0	+	0	-
ρ	a	$\frac{3a}{2}$	0	$-3a$
ρ		+	0	-



- en $\theta = 0$, $\rho(0) = a$ et $\rho'(0) = 0$: c'est le point M_0 . La courbe a une tangente verticale (orthogonale à $\vec{u}(0)$).
- en $\theta = \frac{\pi}{3}$, on a $\rho' = 0$ et $\rho = \frac{3a}{2}$. Sur la figure c'est le point M_1 . La tangente est orthogonale à $\vec{u}(\frac{\pi}{3})$
- lorsque $\theta \in]0, \frac{2\pi}{3}[$, $\rho(\theta) > 0$ et la courbe est dans le secteur angulaire défini par ces angles.
- en $\theta = \frac{2\pi}{3}$, la courbe passe par l'origine, et donc la tangente est dirigée par $\vec{u}(\frac{2\pi}{3})$
- lorsque $\theta \in]\frac{2\pi}{3}, \pi]$, $\rho(\theta) < 0$ et la courbe est dans le secteur angulaire opposé à celui défini par ces angles.
- en $\theta = \pi$, $\rho(\pi) = -3a$ et $\rho'(\pi) = 0$: c'est le point M_2 . La courbe a une tangente verticale (orthogonale à $\vec{u}(\pi)$).

Recherche du (des) point(s) double(s) :

On sait que M est simultanément de coordonnées polaires (ρ_1, θ_1) et (ρ_2, θ_2) si et seulement si l'un des cas suivants est réalisé :

- $\rho_1 = \rho_2 = 0$ ou
- $\rho_1 = \rho_2$ et $\theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ ou
- $\rho_1 = -\rho_2$ et $\theta_1 = \theta_2 + \pi + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

La courbe étant 2π -périodique, on se limite à $\theta \in [-\pi, \pi]$.

premier cas : $\rho_1 = \rho_2 = 0$

Ce cas est réalisé avec $\theta_1 = \frac{2\pi}{3}$ et $\theta_2 = -\frac{2\pi}{3}$. L'origine est un point double.

deuxième cas : $\rho_1 = \rho_2$ et $\theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

non réalisé ici, car la courbe est 2π -périodique.

troisième cas : $\rho_1 = -\rho_2$ et $\theta_1 = \theta_2 + \pi + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Prenons $\theta_1 \in [-\pi, 0]$ et $\theta_2 = \theta_1 + \pi \in [0, \pi]$. Dans ce cas on a

$$\rho(\theta_1) = -\rho(\theta_2) \iff a(2 \cos(\theta_1) - \cos(2\theta_1)) = -a(2 \cos(\theta_1 + \pi) - \cos(2(\theta_1 + \pi))) = a(2 \cos(\theta_1) + \cos(2\theta_1))$$

$$\rho(\theta_1) = -\rho(\theta_2) \iff \cos(2\theta_1) = 0 \iff \theta_1 = -\frac{\pi}{4} \text{ ou } \theta_1 = -\frac{3\pi}{4} \text{ vu l'intervalle considéré.}$$

Nous obtenons deux points doubles : P de coordonnées polaires $(-a\sqrt{2}, -\frac{3\pi}{4})$ et $(a\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$, et Q de coordonnées polaires $(a\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4})$ et $(-a\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4})$.

Exercice 5 :

Etudier la courbe suivante et la tracer : $\rho = \frac{\cos(\theta)}{\cos(\theta) - \sin(\theta)}$

Etudier les branches infinies.

Solution :

La fonction $\rho : \theta \mapsto \frac{\cos(\theta)}{\cos(\theta) - \sin(\theta)}$ est définie sur $D_\rho = \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{4} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

La courbe $\vec{f} : \theta \mapsto \vec{OM}(\theta) = \rho(\theta) \cdot \vec{u}(\theta)$ est 2π périodique.

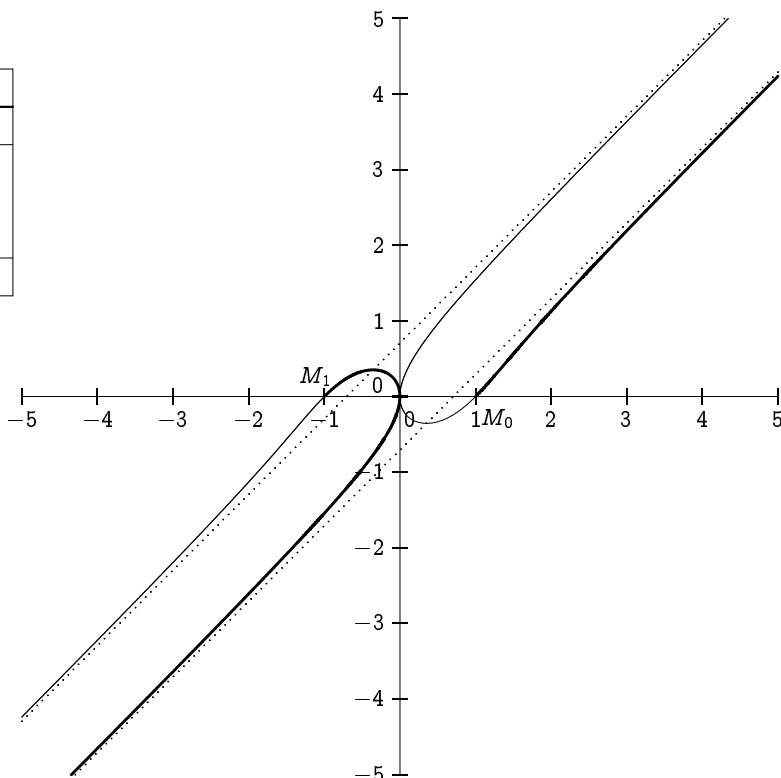
$$\forall \theta \in D_\rho, \theta + \pi \in D_\rho \text{ et } \rho(\theta + \pi) = \frac{-\cos(\theta)}{-\cos(\theta) + \sin(\theta)} = \rho(\theta)$$

La fonction ρ est π -périodique. On étudie la courbe pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}[\cup]\frac{\pi}{4}, \pi]$, et on complète le tracé par symétrie par rapport à l'origine.

$$\rho \text{ est dérivable sur } D_\rho, \text{ et } \rho'(\theta) = \frac{-\sin(\theta)(\cos(\theta) - \sin(\theta)) - \cos(\theta)(-\sin(\theta) - \cos(\theta))}{(\cos(\theta) - \sin(\theta))^2} = \frac{1}{(\cos(\theta) - \sin(\theta))^2}$$

θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π
ρ'	+		+	+
ρ	1	$+\infty$	0	1
ρ	+		-	+

- en $\theta = 0$, on a $\rho(0) = 1$ et $\rho'(0) = 1$. On se situe au point M_0
- pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}[$, on a $\rho(\theta) > 0$, et la courbe est dans le secteur angulaire défini par ces angles.
- pour $\theta \in]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$, on a $\rho(\theta) < 0$, et la courbe est dans le secteur angulaire opposé à celui défini par ces angles.
- $\rho(\frac{\pi}{2}) = 0$. la courbe passe par l'origine avec une tangente dirigée par $\vec{u}(\frac{\pi}{2})$ (verticale)
- pour $\theta \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$, on a $\rho(\theta) > 0$, et la courbe est dans le secteur angulaire défini par ces angles.
- $\rho(\pi) = 1$ et $\rho'(\pi) = 1$: on se situe au point M_1 .



Il n'y a qu'un seul point double : c'est l'origine associé aux paramètres $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\theta = \frac{3\pi}{2}$.

Pour l'étude des branches infinies, on passe en coordonnées cartésiennes : $M \begin{cases} x(\theta) = \rho(\theta) \cos(\theta) = \frac{\cos^2(\theta)}{\cos(\theta) - \sin(\theta)} \\ y(\theta) = \rho(\theta) \sin(\theta) = \frac{\cos(\theta) \sin(\theta)}{\cos(\theta) - \sin(\theta)} \end{cases}$

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} x(\theta) = +\infty, \quad \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} y(\theta) = +\infty$$

$$\text{Ensuite } \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \frac{y(\theta)}{x(\theta)} = \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \tan(\theta) = 1$$

$$\text{Enfin } \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} y(\theta) - x(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \frac{\sin(\theta) \cos(\theta) - \cos^2(\theta)}{\cos(\theta) - \sin(\theta)} = \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} -\cos(\theta) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

la droite d'équation $y = x - \frac{\sqrt{2}}{2}$ est asymptote à la courbe (avec la courbe en dessous de l'asymptote)

Du côté $\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}^+$, on obtient la même asymptote (mais avec $x \rightarrow -\infty$, $y \rightarrow -\infty$ et la courbe au dessus de l'asymptote)

Par symétrie, la droite $y = x + \frac{\sqrt{2}}{2}$ est également asymptote à la courbe.

Exercice 6 :

Etudier la courbe suivante et la tracer : $\rho = \frac{\sin(\theta)}{1 - 2 \cos(\theta)}$

Solution :

La fonction $\rho : \theta \mapsto \frac{\sin(\theta)}{1 - 2 \cos(\theta)}$ est définie sur $D_\rho = \mathbb{R} - \{ \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \}$

La courbe $\vec{f} : \theta \mapsto \vec{OM}(\theta) = \rho(\theta) \cdot \vec{u}(\theta)$ est 2π périodique.

$$\forall \theta \in D_\rho, \quad -\theta \in D_\rho \text{ et } \rho(-\theta) = \frac{\sin(-\theta)}{1 - 2 \cos(-\theta)} = -\rho(\theta)$$

On étudie la courbe pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{3}[\cup]\frac{\pi}{3}, \pi]$, et on complète le tracé par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées (Oy).

$$\rho \text{ est dérivable sur } D_\rho, \text{ et } \rho'(\theta) = \frac{\cos(\theta)(1 - 2 \cos(\theta)) - \sin(\theta) \cdot 2 \sin(\theta)}{(1 - 2 \cos(\theta))^2} = \frac{\cos(\theta) - 2}{(1 - 2 \cos(\theta))^2}$$

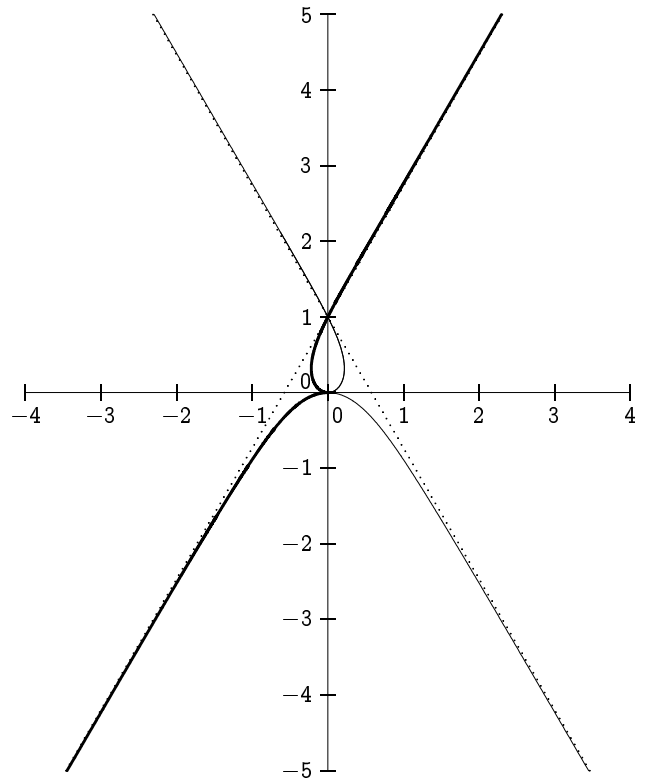
$\forall \theta \in D_\rho, \rho'(\theta) < 0.$

θ	0	$\frac{\pi}{3}$	π
ρ'	-		-
ρ	0	$+\infty$	0
ρ	0	$-\infty$	0
ρ	0	-	+ 0

la portion du support correspondant à $\theta \in [0, \pi]$ est en gras.

- en $\theta = 0$, on a $\rho(0) = 0$ donc la courbe passe par l'origine avec une tangente dirigée par $\vec{u}(0)$ (horizontale).
- pour $\theta \in]0, \frac{\pi}{3}[$, on a $\rho(\theta) < 0$, et la courbe est dans le secteur angulaire opposé à celui défini par ces angles.
- pour $\theta \in]\frac{\pi}{3}, \pi[$, on a $\rho(\theta) > 0$, et la courbe est dans le secteur angulaire défini par ces angles.
- $\rho(\pi) = 0$ donc la courbe repasse par l'origine avec une tangente dirigée par $\vec{u}(\pi)$ (horizontale).

On complète la courbe par symétrie par rapport à (Oy)



Pour l'étude des branches infinies, on passe en coordonnées cartésiennes : $M \begin{cases} x(\theta) = \rho(\theta) \cos(\theta) = \frac{\sin(\theta) \cos(\theta)}{1 - 2 \cos(\theta)} \\ y(\theta) = \rho(\theta) \sin(\theta) = \frac{\sin^2(\theta)}{1 - 2 \cos(\theta)} \end{cases}$

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{3}^-} x(\theta) = -\infty, \quad \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{3}^-} y(\theta) = -\infty$$

Ensuite $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{3}^-} \frac{y(\theta)}{x(\theta)} = \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{3}^-} \tan(\theta) = \sqrt{3}$

Enfin $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{3}^-} y(\theta) - \sqrt{3}x(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{3}^-} \frac{\sin^2(\theta) - \sqrt{3} \sin(\theta) \cos(\theta)}{1 - 2 \cos(\theta)} = \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{3}^-} \sin(\theta) \frac{\frac{\pi}{3} - \theta}{\cos(\frac{\pi}{3}) - \cos(\theta)} \frac{\sin(\theta - \frac{\pi}{3})}{\frac{\pi}{3} - \theta} = 1$

Car $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{3}^-} \frac{\frac{\pi}{3} - \theta}{\cos(\frac{\pi}{3}) - \cos(\theta)} = \frac{1}{\cos'(\frac{\pi}{3})} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ et $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{3}^-} \frac{\sin(\theta - \frac{\pi}{3})}{\frac{\pi}{3} - \theta} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = -1$

la droite d'équation $y = \sqrt{3}x + 1$ est asymptote à la courbe

Du côté $\theta \rightarrow \frac{\pi}{3}^+$, on obtient la même asymptote (mais avec $x \rightarrow +\infty, y \rightarrow +\infty$)

Par symétrie, la droite $y = -\sqrt{3}x + 1$ est également asymptote à la courbe.

Exercice 7 :

Etudier la courbe suivante et la tracer : $\rho = \frac{1 - \sin(\theta)}{1 - \cos(\theta)}$

Solution :

La fonction $\rho : \theta \mapsto \frac{1 - \sin(\theta)}{1 - \cos(\theta)}$ est définie sur $D_\rho = \mathbb{R} - \{2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

La courbe $\vec{f} : \theta \mapsto \vec{OM}(\theta) = \rho(\theta) \cdot \vec{u}(\theta)$ est 2π périodique.

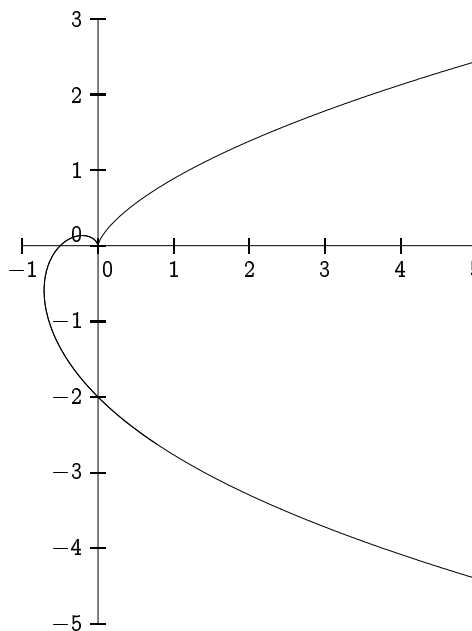
On étudie la courbe pour $\theta \in]0, 2\pi[$

ρ est dérivable sur D_ρ , et $\rho'(\theta) = \frac{-\cos(\theta)(1 - \cos(\theta)) - \sin(\theta) \cdot (1 - \sin(\theta))}{(1 - \cos(\theta))^2} = \frac{1 - \cos(\theta) - \sin(\theta)}{(1 - \cos(\theta))^2}$

$= \sqrt{2} \frac{\sin(\frac{\pi}{4}) - \sin(\theta + \frac{\pi}{4})}{(1 - \cos(\theta))^2}$

- si $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ alors $\theta + \frac{\pi}{4} \in]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}[$ et $\sin(\theta + \frac{\pi}{4}) > \sin(\frac{\pi}{4})$. Dans ce cas on a $\rho'(\theta) < 0$.
- $\rho'(\frac{\pi}{2}) = 0$.
- si $\theta \in]\frac{\pi}{2}, 2\pi[$ alors $\theta + \frac{\pi}{4} \in]\frac{3\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}[$ et $\sin(\theta + \frac{\pi}{4}) < \sin(\frac{\pi}{4})$. Dans ce cas on a $\rho'(\theta) > 0$.

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	2π
ρ'		- 0 +	
ρ	$+\infty$	0	$+\infty$
ρ		+ 0 +	



- pour $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a $\rho(\theta) > 0$ et la courbe est dans le secteur angulaire défini par ces angles.
- $\rho(\frac{\pi}{2}) = 0$ donc la courbe repasse par l'origine avec une tangente dirigée par $\vec{u}(\frac{\pi}{2})$ (verticale).
- pour $\theta \in]\frac{\pi}{2}, 2\pi[$, on a $\rho(\theta) > 0$, et la courbe est dans le secteur angulaire défini par ces angles.

Pour l'étude des branches infinies, on passe en coordonnées cartésiennes : $M \begin{cases} x(\theta) = \rho(\theta) \cos(\theta) = \frac{\cos(\theta)(1 - \sin(\theta))}{1 - \cos(\theta)} \\ y(\theta) = \rho(\theta) \sin(\theta) = \frac{\sin(\theta)(1 - \sin(\theta))}{1 - \cos(\theta)} \end{cases}$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} x(\theta) = +\infty, \quad \lim_{\theta \rightarrow 0^+} y(\theta) = +\infty \text{ car } \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin(\theta)}{1 - \cos(\theta)} = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin(\theta)(1 + \cos(\theta))}{1 - \cos^2(\theta)} = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{1 + \cos(\theta)}{\sin(\theta)} = +\infty$$

Ensuite $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{y(\theta)}{x(\theta)} = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \tan(\theta) = 0$

La courbe présente donc au voisinage de cette valeur une branche parabolique de direction asymptotique l'axe (0x).

On trouve également lorsque $\theta \rightarrow 2\pi^-$, que la courbe possède une branche parabolique de direction asymptotique l'axe (0x).

Exercice 8 :

Etudier la courbe suivante et la tracer : $\rho = \frac{1 - \sin(\theta)}{1 + \cos(\theta)}$

Solution :

Exercice 9 :

Etudier la courbe suivante et la tracer : $\rho = \cos(\theta) - \sin(\theta)$

Solution :

Il paraît que c'est la première invention de l'Homme!

Exercice 10 :

Etudier la courbe suivante et la tracer : $\rho = a \tan(3\theta)$

Solution :

Exercice 11 :

Etudier les courbes en coordonnées polaires suivantes

- (a) $\rho = a\theta$ (spirale d'Archimède)
- (b) $\rho \cdot \theta = a$ (spirale hyperbolique)
- (c) $\rho = ae^{i\theta}$ (spirale logarithmique); la tangente et le rayon vecteur font un angle constant.

Solution :**Exercice 12 :**

Soit (C) la courbe d'équation cartésienne $x(x^2 + y^2) + a(y^2 - x^2) = 0$.

- (a) Trouver une équation polaire de (C) .
- (b) Tracer (C) (Lemniscate de Bernoulli).

Solution :**Exercice 13 :**

Soit \mathcal{G} la courbe d'équation $\rho = \frac{\sin(2\theta)}{\sin(\theta) - \cos(\theta)}$

- (a) Calculer $\rho(\theta + \pi)$ et $\rho\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$, et en déduire qu'on peut limiter l'étude à θ décrivant $\left] \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right]$
- (b) Tracer alors la courbe, après avoir étudié la branche infinie obtenue quand θ tend vers $\left(\frac{\pi}{4}\right)^+$.

Solution :**Exercice 14 :**

Problèmes de lieux

- (a) Les extrémités A et B d'un segment de longueur constante $AB = 2a$ décrivent les axes Ox et Oy . Déterminer le lieu des projections de O sur (AB) .
- (b) Un point M décrit le cercle de centre O de rayon a ; soit A le point de coordonnées $(a, 0)$. Déterminer le lieu des orthocentres du triangle OAM .
- (c) Soient A et B deux points distincts tels que $AB = 2$. Déterminer le lieu des points M tels que $MA \cdot MB = 1$. On prendra un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) avec O milieu de $[AB]$ et $\widehat{(\vec{i}, \vec{OA})} = -\frac{\pi}{4}$. Montrer qu'on obtient une lemniscate de Bernoulli.

Solution :