

1. On appelle φ l'application du plan euclidien privé de son origine O dans lui-même définie par :
 $(M' = \varphi(M)) \iff \left(\widehat{(\vec{OM}, \vec{OM}')} = 0 [2\pi] \right) \text{ et } OM \cdot OM' = 1$
 - (a) Dans \mathbb{C}^* , on note z l'affixe de M et $z' = h(z)$ celle de M' . Expliciter $h(z)$.
 - (b) En utilisant leurs équations polaires, étudier l'image par φ d'une droite, d'un cercle de centre O ou d'un cercle passant par l'origine.
 - (c) En utilisant les coordonnées cartésiennes, étudier l'image par φ d'un cercle de centre $\neq O$ et ne passant pas par l'origine.
 - (d) Quelles sont les droites globalement invariantes par φ , les cercles globalement invariants ?
2. Etudier et tracer la courbe d'équation polaire : $\rho = \frac{\sin(3\theta)}{\sin(\theta)}$
3. Etudier et tracer la courbe d'équation polaire : $\rho = \cos\left(\frac{3}{2}\theta\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}$
4. Etudier et tracer la courbe d'équation polaire : $\rho = a(2\cos(\theta) - \cos(2\theta))$
trouver les coordonnées du (ou des) point(s) double(s) ;
5. Etudier et tracer la courbe d'équation polaire : $\rho = \frac{\cos(\theta)}{\cos(\theta) - \sin(\theta)}$
Etudier les branches infinies.
6. Etudier et tracer la courbe d'équation polaire : $\rho = \frac{\sin(\theta)}{1 - 2\cos(\theta)}$
7. Etudier et tracer la courbe d'équation polaire : $\rho = \frac{1 - \sin(\theta)}{1 - \cos(\theta)}$
8. Etudier et tracer la courbe d'équation polaire : $\rho = \frac{1 - \sin(\theta)}{1 + \cos(\theta)}$
9. Etudier et tracer la courbe d'équation polaire : $\rho = \cos(\theta) - \sin(\theta)$
10. Etudier et tracer la courbe d'équation polaire : $\rho = a \tan(3\theta)$
11. Etudier et tracer les courbes d'équation polaire :
 - (a) $\rho = a\theta$ (spirale d'Archimède)
 - (b) $\rho \cdot \theta = a$ (spirale hyperbolique)
 - (c) $\rho = ae^{i\theta}$ (spirale logarithmique) ; la tangente et le rayon vecteur font un angle constant.
12. Soit (C) la courbe d'équation cartésienne $x(x^2 + y^2) + a(y^2 - x^2) = 0$.
 - (a) Trouver une équation polaire de (C) .
 - (b) Tracer (C) (Lemniscate de Bernoulli).
13. Soit \mathcal{G} la courbe d'équation $\rho = \frac{\sin(2\theta)}{\sin(\theta) - \cos(\theta)}$
 - (a) Calculer $\rho(\theta + \pi)$ et $\rho\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$, et en déduire qu'on peut limiter l'étude à θ décrivant $\left] \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right]$
 - (b) Tracer alors la courbe, après avoir étudié la branche infinie obtenue quand θ tend vers $\left(\frac{\pi}{4}\right)^+$.
14. Problèmes de lieux
 - (a) Les extrémités A et B d'un segment de longueur constante $AB = 2a$ décrivent les axes Ox et Oy . Déterminer le lieu des projections de O sur (AB) .
 - (b) Un point M décrit le cercle de centre O de rayon a ; soit A le point de coordonnées $(a, 0)$. Déterminer le lieu des orthocentres du triangle OAM .
 - (c) Soient A et B deux points distincts tels que $AB = 2$. Déterminer le lieu des points M tels que $MA \cdot MB = 1$.
On prendra un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) avec O milieu de $[AB]$ et $\widehat{(\vec{i}, \vec{OA})} = -\frac{\pi}{4}$. Montrer qu'on obtient une lemniscate de Bernoulli.