مادّة الرياضيات المدّة 4 ساعات المعامل 9	الإمتحان التجريبي الموحّد للبكالوريا علوم رياضيات-ا-ب دورة ماي 2010	المملكة المغربية وزارة التربية الوطنية والتعليم العالي وتكوين الأطر والبحث العلمي قطاع التربية الوطنية النيّابة الإقليمية لآسفي مفتشية الريّاضيات

سلّم التنقيط

تمرين 1: (3 نقط و نصف)

$\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ هي مجموعة المصفوفات الربعة من الرتبة 2

نذكر أن $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية وحدتها $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ ، وأن $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R}),+,\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي

نعتبر المجموعة E بحيث :

$$E=\left\{M_{(x,y)}\in\mathbb{M}_2(\mathbb{R});\ M_{(x,y)}=\begin{pmatrix}x&-y\\y&x+y\end{pmatrix}/\left(x,y\in\mathbb{R}^2\right)\right\}$$

و نضع $J=\begin{pmatrix}0&-1\\1&1\end{pmatrix}$

1) أ- تحقق أن $I\in E$ وأن $J\in E$

ب- بين أن : $(E,+)$ جزء مستقر من $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R}),+)$

2- أ- تحقق أن $J^2=J-I$

ب- استنتج أن : $(E,\times)$ جزء مستقر من $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R}),\times)$

3- بين أن $(E,+,\times)$ حلقة واحدية تبادلية

4- أ- بين أن $x^2+y^2+xy=0\Leftrightarrow x=y=0$; $\left(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\right)$

ب- ليكن $(x,y)\in\mathbb{R}^{*2}$ نضع $\Delta=x^2+y^2+xy$

أحسب $M_{(x,y)}\times M_{\left(\frac{x+y}{\Delta},\frac{-y}{\Delta}\right)}$

ج- استنتج أن $(E,+,\times)$ جسم تبادلي

5- نضع $F=\mathbb{R}^{*2}$ و نزود F بقانون التركيب الداخلي T المعرف بما يلي :

$$\forall(x,y)\in F\quad\forall(a,b)\in F\quad;\quad(x,y)\mathrm{T}(a,b)=(ax-by,ay+bx+by)$$

نعتبر التطبيق

$$\varphi:F\to E$$
$$(x,y)\to M_{(x,y)}$$

أ- بين أن التطبيق تشاكل تقابلي

ب- استنتج البنية الجبرية ل (F,T)

0,25
0,25
0,25
0,25
0,5
0,25
0,5
0,5
0,5
0,25

تمرين 2 :(6 نقط و نصف)

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ،ممنظم و موجه $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

1) ليكن $z\in\mathbb{C}^*$ ، نعتبر المعادلة : $(E):\ z^2-\left(2-\sqrt{3}+i\right)mz+2\left(i-\sqrt{3}\right)m^2=0$

ا- بيّن أن مميّز المعادلة (E) هو $\Delta=\left(2+\sqrt{3}-i\right)^2m^2$.

ب- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) .

ج- ليكن z_1 و z_2 حلّي المعادلة (E) بحيث $\arg z_1\equiv\arg m\,[2\pi]$ ، اكتب $\dfrac{z_2}{z_1}$ على شكله الأسي.

2) نعتبر التطبيق F الذي يربط النقطة M ذات اللحق z بالنقطة M' ذات اللحق z' بحيث: $z'=e^{i\frac{5\pi}{6}}z$.

ا- حدّد طبيعة F و عناصره المميزة.

ب- حدّد صورة الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(1+i)$ و شعاعها 2 بالتطبيق F .

3) لكل عدد صحيح طبيعي n نربط النقطة $M_n(z_n)$ بحيث :

M_0 هي النقطة ذات اللحق i و $(\forall n\in\mathbb{N})\ \ M_{n+1}=F(M_n)$

ا- بيّن أن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ \ z_n=e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5\pi}{6}n\right)}$

ب- بين أن : $\forall(n,p)\in\mathbb{N}^2;\ M_n=M_p\Leftrightarrow n\equiv p\,[12]$

ج- حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(E)\ \ 12x-5y=3$

د- استنتج مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية n بحيث M_n تنتمي إلى نصف المحور الحقيقي الموجب .

4) نعتبر في $\mathbb{Z}$ النظمة : $(S):\begin{cases}x\equiv 0\,[12]\\ x\equiv 3\,[5]\end{cases}$

ا- ليكن (k_0,l_0) حلا خاصا للمعادلة (E) ،بيّن أن العدد $x_0=12k_0=5l_0+3$ حل خاص للنظمة (S).

ب- بيّن أن x حل للنظمة (S) إذا و فقط إذا كان : $\begin{cases}x\equiv x_0\,[12]\\ x\equiv x_0\,[5]\end{cases}$

ج- استنتج أن x يكون حلا للنظمة (S) إذا و فقط إذا كان : $x\equiv x_0\,[60]$.

د- حل في $\mathbb{Z}$ النظمة (S).

5) حدّد المجموعة : $R_n=\left\{n\in\mathbb{N}/M_n=M_0\ \ n\ \equiv 3[5]\right\}$

تمرين 3 :(10 نقط)

لكل n من $\mathbb{N}^*$ نعتبر الدالة f_n المعرفة على $]0,+\infty[$ كمايلي: $f_n(x)=(x-1)^n\ln x$

0,5
0,5
0,5
0,5
0,5
0,5
0,5
0,5
0,5
0,25
0,5
0,25
0,5
0,5
0,25

ليكن (C_n) منحناها في م م م $\mathcal{R}=(O,\vec{i},\vec{j})$ حيث : $\|\vec{i}\|=2cm$

الجزء (I) : نضع $g_n(x)=n\ln(x)+1-\frac{1}{x}$ لكل $x\succ 0$ و لكل $n\in\mathbb{N}^*$

1) أ- ادرس تغيرات g_n على المجال $]0,+\infty[$

ب- احسب $g_n(1)$ واستنتج إشارة $(x-1)g_n(x)$ على $]0,+\infty[$

2) أ- بين أن $f_n'(x)=(x-1)^{n-1}g_n(x) \quad \forall x\succ 0$

ب- ادرس حسب زوجية n تغيرات f_n على المجال $]0,+\infty[$

ج- ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_n)

د- ادرس الوضع النسبي ل (C_n) و (C_{n+1})

3) أنشئ (C_1) و (C_2) في نفس المعلم $\mathcal{R}=(O,\vec{i},\vec{j})$

4) احسب مساحة الحيز المحصور بين (C_1) و (C_2) والمستقيمين $x=1$ æ $x=e$

الجزء (II) :

نعتبر الدالة F المعرفة على $[0,1[\cup]1,+\infty[$ بما يلي : $F(x)=\int_x^{x^2}\frac{f_1(t)}{(t-1)^4}dt$ و

$F(0)=0$

1) أثبت أن لكل x من $]0,1[$ لدينا : $2\ln(x)\int_x^{x^2}\frac{dt}{(t-1)^3}\le F(x)\le \ln(x)\int_x^{x^2}\frac{dt}{(t-1)^3}$

2) أ- احسب التكامل $\int_x^{x^2}\frac{dt}{(t-1)^3}$

ب - استنتج أن : $\frac{(x^2+2x).\ln x}{(x^2-1)^2}\le F(x)\le \frac{(x^2+2x).\ln x}{2(x^2-1)^2} \quad \forall x]0,1[$

ج- ادرس اتصال F على اليمين في الصفر

د- احسب النهاية $\lim_{x\to 1^-}F(x)$ ثم أول النتيجة هندسيا.

ه- ادرس اشتقاق F على اليمين في الصفر ثم أول النتيجة هندسيا

3) أ- بين أن :لكل $x>1$ لدينا : $\frac{(x^2+2x).\ln x}{2(x^2-1)^2}\le F(x)\le \frac{(x^2+2x).\ln x}{(x^2-1)^2}$

ب- استنتج النهايات: $\lim_{x\to 1^+}F(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}F(x)$

4) أ- ادرس اشتقاق F على كل من المجالين $]0,1[$ و $]1,+\infty[$

ب- اعط جدول تغيرات الدالة F (لاحظ أن :لكل $x\in\mathbb{R}^+$ لدينا $x^3+3x^2-x+1\ge 0$)

5) ارسم منحنى F في م م م $\mathcal{R}=(O,\vec{i},\vec{j})$ مع $\|\vec{i}\|=2cm$

0,25
0,25
0,5
0,5
0,5
0,75
0,75
0,5
0,25
0,5
0,25
0,5
0,5
0,5
0,5
0,25
0,75
0,5

الجزء (III) : لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع $I_n = \int_1^2 f_n(t)\,dt$ 1) أتبث أن : $(n+1)I_n = \ln 2 - \int_1^2 \frac{(x-1)^{n+1}}{x}\,dx \qquad \forall n \in \mathbb{N}$ 2) ب- استنتج أن : $\frac{1}{2(n+2)} \le \ln 2 - (n+1)I_n \le \frac{1}{n+2}$ ج- احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} (n+1)I_n$	0,5 0,5 0,25