



تصحيح امتحان يونيو 2010

الثانية علوم تجريبية بمسلكها و علوم تكنولوجيا بمسلكها

التمرين 1

1/ نبين أن $\overline{AB} \wedge \overline{AC} = 3\vec{i} + 4\vec{k}$ ونستنتج أن $3x + 4z - 9 = 0$ معادلة (ABC) لدينا $A(-1; 0; 3)$ و $B(3; 0; 0)$ و $C(7; 1; -3)$ ومنه $\overline{AB}(4; 0; -3)$ و $\overline{AC}(8; 1; -6)$ و بالتالي $\overline{AB} \wedge \overline{AC} = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -6 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = 3\vec{i} + 4\vec{k}$ منه معادلة (ABC) على شكل $3x + 4z + d = 0$ لان $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$ منظمية على (ABC) بما أن $A(-1; 0; 3) \in (ABC)$ فإن $9 + d = 0$ أي $d = -9$ إذن $3x + 4z - 9 = 0$ معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) 2/ نبين مركز الفلكة (S) هي النقطة $\Omega(3; 1; 0)$ و شعاعها 5 $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2y - 9 = 0$ ومنه $(S): (x-3)^2 - 9 + (y-1)^2 - 1 + z^2 - 15 = 0$ أي $(S): (x-3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 5^2$ إذن (S) فلكة مركزها النقطة $\Omega(3; 1; 0)$ و شعاعها 5

$$3/ \text{أ- نبين أن } \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 1 \\ z = 4t \end{cases} (t \in \mathbb{R}) \text{ تمثيل بارامتري للمستقيم } (\Delta)$$

بما أن $(ABC) \perp (\Delta)$ فان $\overline{AB} \wedge \overline{AC}(3; 0; 4)$ موجهة لـ (Δ)

$$\text{وحيث } \Omega(3; 1; 0) \in (\Delta) \text{ فان } \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 1 \\ z = 4t \end{cases} (t \in \mathbb{R}) \text{ تمثيل بارامتري للمستقيم } (\Delta)$$

ب- نبين أن المستقيم (Δ) يقطع الفلكة (S) في النقطتين $E(6; 1; 4)$ و $F(0; 1; -4)$

لتكن $M(x; y; z)$ من الفضاء

$$M \in (S) \cap (\Delta) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 1 \\ z = 4t \\ (x-3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 1 \\ z = 4t \\ 9t^2 + 16t^2 = 25 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 1 \\ z = 4t \\ t^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 1 \\ z = 4 \\ t = 1 \end{cases} \text{ أو } \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = -4 \\ t = -1 \end{cases}$$

إذن المستقيم (Δ) يقطع الفلكة (S) في النقطتين $E(6; 1; 4)$ و $F(0; 1; -4)$

التمرين 2

$$z \in \mathbb{C} \quad z^2 - 6z + 10 = 0 \text{ نحل } /1$$

$$\Delta = 36 - 40 = -4 = (2i)^2 \text{ ليكن } \Delta \text{ مميز المعادلة}$$

$$S = \{3+i; 3-i\} \text{ إذن } z = 3-i \text{ أو } z = \frac{6+2i}{2} = 3+i \text{ ومنه}$$

$$/2 \text{ نبين أن } z' = iz + 2 - 4i$$

ليكن $M(z)$ و $M'(z')$ و R الدوران الذي مركزه $A(3-i)$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$

$$R(M) = M' \Leftrightarrow z' = e^{i\frac{\pi}{2}} (z - 3 + i) + 3 - i$$

$$R(M) = M' \Leftrightarrow z' = i(z - 3 + i) + 3 - i$$

$$R(M) = M' \Leftrightarrow z' = iz - 3i - 1 + 3 - i$$

$$R(M) = M' \Leftrightarrow z' = iz + 2 - 4i$$

ب- نتحقق أن لحق C' هو $c' = 5 + 3i$ حيث $R(C) = C'$

لدينا $C(7-3i)$ نعتبر c' لحق C'

$$R(C) = C' \Leftrightarrow c' = i(7-3i) + 2 - 4i = 7i + 3 + 2 - 4i = 5 + 3i$$

ج- نبين أن $\frac{c'-b}{c-b} = \frac{1}{2}i$ ثم نستنتج أن المثلث BCC' قائم الزاوية في B و $BC = 2BC'$

$$\frac{c'-b}{c-b} = \frac{5+3i-3-i}{7-3i-3-i} = \frac{2+2i}{4-4i} = \frac{1+i}{2(1-i)} = \frac{(1+i)^2}{4} = \frac{2i}{4} = \frac{1}{2}i$$

لدينا $\frac{c'-b}{c-b} = \frac{1}{2}i$ ومنه $[2\pi]$ أي $\overline{BC; BC'} \equiv \arg \frac{1}{2}i \equiv \frac{\pi}{2}$ قائم الزاوية في B

$$BC = 2BC' \text{ إذن } \frac{BC'}{BC} = \frac{1}{2} \text{ ومنه } \left| \frac{c'-b}{c-b} \right| = \left| \frac{1}{2}i \right|$$

التمرين 3

/1 نبين أن $P(A) = \frac{1}{2}$ و $P(B) = \frac{41}{42}$

ليكن Ω كون الإمكانات

$$\text{card } \Omega = C_{10}^4 = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 10 \times 3 \times 7 = 210$$

$$P(A) = \frac{105}{210} = \frac{1}{2} \text{ ومنه } \text{card } A = C_3^1 \times C_7^3 = 3 \times \frac{7 \times 6 \times 5}{6} = 3 \times 7 \times 5 = 105$$

" B الحصول على كرة بيضاء على الأقل " و منه \bar{B} " الحصول على كرات لا تحتوي على كرة بيضاء "

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{1}{42} = \frac{41}{42} \text{ إذن } P(\bar{B}) = \frac{5}{210} = \frac{1}{42} \text{ ومنه } \text{card } \bar{B} = C_5^4 = 5$$

/2- نتحقق أن القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X هي 0 و 1 و 2 و 3

المتغير العشوائي X يربط كل سحبة بعدد الكرات الحمراء المسحوبة لدينا الصندوق يحتوي على 10 كرات من بينها 3 كرات حمراء و حيث أننا نسحب اربع كرات في ان واحد فان القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X هي 0 و 1 و 2 و 3.

$$\text{ب- نبين أن } P(X=0) = \frac{1}{6} \text{ و } P(X=2) = \frac{3}{10}$$

$$P(X=0) = \frac{C_7^4}{C_{10}^4} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{7 \times 5}{210} = \frac{1}{6} \text{ و } P(X=2) = \frac{C_3^2 \times C_7^2}{C_{10}^4} = \frac{3 \times 7 \times 3}{210} = \frac{3}{10}$$

ج- نحدد قانون احتمال المتغير العشوائي X

لدينا $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3\}$

$$P(X=3) = \frac{C_3^3 \times C_7^1}{210} = \frac{7}{210} = \frac{1}{30} \text{ و } P(X=2) = \frac{3}{10} \text{ و } P(X=1) = P(A) = \frac{1}{2} \text{ و } P(X=0) = \frac{1}{6}$$

نلخص قانون احتمال المتغير العشوائي X في الجدول

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

التمرين 4

1/ نبين بالترجع $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n - 1 > 0$

من أجل $n=0$ لدينا $u_0 - 1 = 2 - 1 = 1 > 0$

ليكن $n \in \mathbb{N}$

نفترض ان $u_n - 1 > 0$ عبارة صحيحة حتى الرتبة n نبين ان $u_{n+1} - 1 > 0$

$$u_{n+1} - 1 = \frac{3u_n - 1}{2u_n} - 1 = \frac{u_n - 1}{2u_n}$$

و حيث ان $u_n > 1$ فان $\frac{u_n - 1}{2u_n} > 0$ إذن $u_{n+1} - 1 > 0$

ومنه $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n - 1 > 0$

2/ أ- نبين ان (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و نستنتج ان $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

ليكن $n \in \mathbb{N}$

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{2u_{n+1} - 1} = \frac{\frac{3u_n - 1}{2u_n} - 1}{2\left(\frac{3u_n - 1}{2u_n}\right) - 1} = \frac{u_n - 1}{4u_n - 2} = \frac{1}{2} \left(\frac{u_n - 1}{2u_n - 1}\right) = \frac{1}{2} v_n$$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = v_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{2-1}{4-1} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ومنه $\frac{1}{2}$ متتالية هندسية أساسها

ب- نبين ان $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ ثم نستنتج ان $u_n = \frac{v_n - 1}{2v_n - 1}$

لدينا $v_n = \frac{u_n - 1}{2u_n - 1}$ ومنه $2v_n u_n - v_n = u_n - 1$ و بالتالي $u_n(2v_n - 1) = v_n - 1$ إذن $u_n = \frac{v_n - 1}{2v_n - 1}$

و حيث ان $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ فان $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ ومنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n - 1}{2v_n - 1} = 1$

3/ نحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$

لدينا $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n) = \ln 1 = 0$ لان دالة \ln متصلة في 1

التمرين 5

1/ نبين ان $\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = 4(2x+1)e^{2x}$

ليكن $x \in \mathbb{R}$ لدينا $g(x) = 1 + 4xe^{2x}$

ومنه $g'(x) = 4e^{2x} + 8xe^{2x} = 4(2x+1)e^{2x}$

2- نبين ان الدالة g تزايدية على $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ و تناقصية على $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$

لدينا $g'(x) = 4(2x+1)e^{2x}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ ومنه اشارة $g'(x)$ هي اشارة $(2x+1)$

$$\begin{aligned} \text{ومنه } 2x+1 \geq 0 \quad \forall x \in \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[\quad \text{أي } g'(x) \geq 0 \quad \text{إذن } g \text{ تزايدية على } \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[\\ \text{ومنه } 2x+1 \leq 0 \quad \forall x \in \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right] \quad \text{أي } g'(x) \leq 0 \quad \text{إذن } g \text{ تناقصية على } \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right] \end{aligned}$$

$$3- \text{أ- نبين أن } g\left(\frac{-1}{2}\right) = 1 - \frac{2}{e} > 0 \text{ ثم تحقق أن } g\left(\frac{-1}{2}\right) > 0$$

$$g\left(\frac{-1}{2}\right) = 1 + \frac{-4}{2}e^{-1} = 1 - \frac{2}{e} > 0 \text{ لدينا } e > 2 \text{ ومنه } \frac{2}{e} < 1 \text{ إذن } g\left(\frac{-1}{2}\right) > 0$$

ب- استنتج $g(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$g \text{ تزايدية على } \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[\text{ و تناقصية على } \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right] \text{ ومنه } g \text{ تقبل قيمة دنيا عند } -\frac{1}{2}$$

$$\text{إذن } \forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) \geq g\left(\frac{-1}{2}\right) > 0 \text{ و حيث } g\left(\frac{-1}{2}\right) > 0 \text{ فإن } g(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{II / 1- نحسب } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ و نبين أن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x-1)e^{2x} + x + 1 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x-1)e^{2x} + x + 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2xe^{2x} - e^{2x} + x + 1 = -\infty$$

$$\text{لان } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} 2xe^{2x} = 0$$

2/ نبن ان $f'(x) = g(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ ثم نستنتج ان f تزايدية قطعاً على \mathbb{R}

$$\text{لدينا } f(x) = (2x-1)e^{2x} + x + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{ومنه } \forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 2e^{2x} + 2(2x-1)e^{2x} + 1 = 4xe^{2x} + 1 = g(x)$$

بما ان $g(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ أي $f'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ فان f تزايدية قطعاً على \mathbb{R}

$$3/ \text{أ- نحسب } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ و نستنتج أن } (C) \text{ يقبل فرعاً شلجيميا في اتجاه محور الارايب}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x-1)e^{2x} + x + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{1}{x}\right)e^{2x} + 1 + \frac{1}{x} = +\infty$$

إذن (C) يقبل فرعاً شلجيميا في اتجاه محور الارايب

ب- نحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x+1)]$ و نستنتج المستقيم (Δ) دا المعادلة $y = x+1$ مقارب للمنحنى (C) بجوار

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x+1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2xe^{2x} - e^{2x} = 0$$

إذن المستقيم (Δ) دا المعادلة $y = x+1$ مقارب للمنحنى (C) بجوار $-\infty$

ج- نحدد زوج إحداثيتي تقاطع (Δ) و المنحنى (C) ثم نبين أن (C) تحت (Δ) على $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right[$ و فوق (Δ) على

$$\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$$

$$f(x) = x+1 \Leftrightarrow (2x-1)e^{2x} \Leftrightarrow 2x-1=0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

و منه زوج إحداثيتي تقاطع (Δ) و المنحنى (C) هو $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$

لدينا $f(x) - (x+1) = (2x-1)e^{2x}$ ومنه إشارة $f(x) - (x+1)$ هي إشارة $2x-1$

و حيث $2x-1$ سالبة قطعاً على $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right[$ و موجبة قطعاً على $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$

فان المنحنى (C) تحت (Δ) على $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right[$ و فوق (Δ) على $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$

أ- نبين أن $y = x$ هي معادلة للمستقيم (T) المماس للمنحنى في النقطة O

معادلة المستقيم (T) المماس للمنحنى في النقطة O هي $y = f'(0)x + f(0)$

و حيث أن $f(0) = 0$ و $f'(0) = g(0) = 1$ فان معادلة المستقيم (T) هي $y = x$

ب- نبين أن للمنحنى (C) نقطة انعطاف افصولها $-\frac{1}{2}$

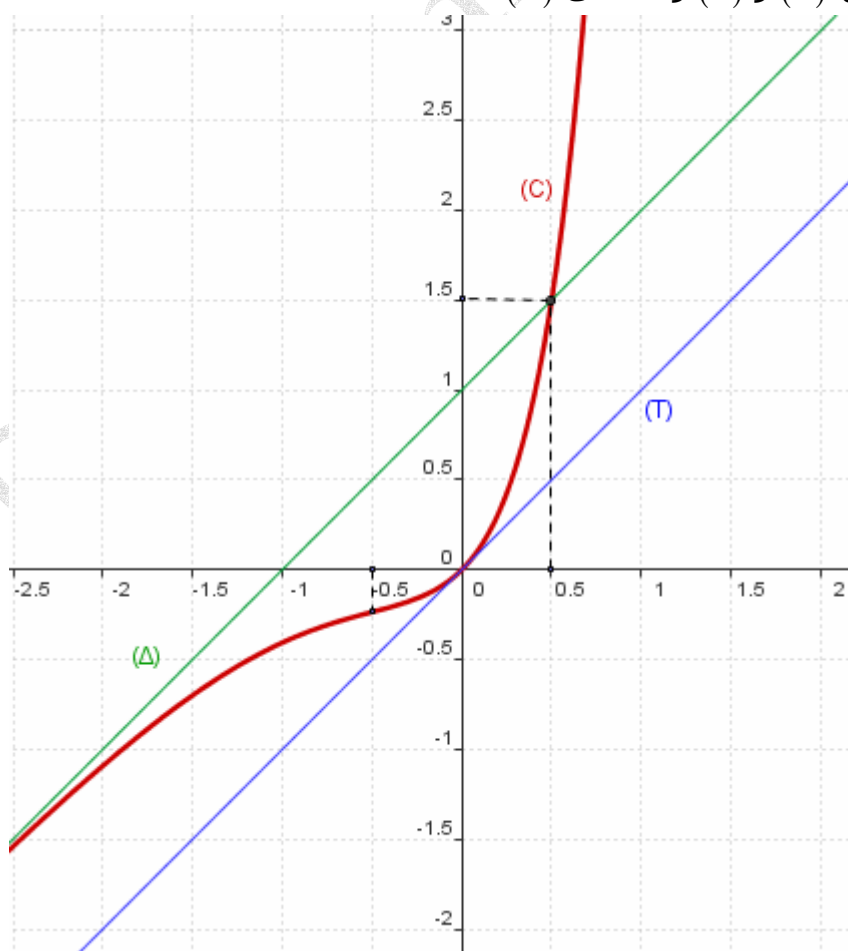
لدينا $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = g(x)$ و منه $\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) = g'(x) = 4(2x+1)e^{2x}$

و منه إشارة $f''(x)$ هي إشارة $2x+1$

x	$-\frac{1}{2}$
$f''(x)$	- 0 +

إذن المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف افصولها $-\frac{1}{2}$

5/ إنشاء المستقيمين (Δ) و (T) و المنحنى (C)



6/ أ- نبين أن $\int_0^{\frac{1}{2}} (2x-1)e^{2x} dx = 1 - \frac{e}{2}$ باستعمال المكاملة بالاجزاء

نضع $u(x) = 2x-1$ و $v'(x) = e^{2x}$ ومنه $u'(x) = 2$ و $v(x) = \frac{e^{2x}}{2}$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (2x-1)e^{2x} dx = \left[(2x-1) \frac{e^{2x}}{2} \right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} e^{2x} dx \left[(2x-1) \frac{e^{2x}}{2} \right]_0^{\frac{1}{2}} - \left[\frac{e^{2x}}{2} \right]_0^{\frac{1}{2}} = \left[(x-1) e^{2x} \right]_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{e}{2} + 1$$

ب- نبين أن مساحة الحيز المحصور بين (C) و المستقيم $y = x$ (T) و المستقيمين اللذين معادلتهم $x = 0$ و

$$x = \frac{1}{2} \text{ هي } (6-2e) \text{ cm}^2$$

لتكن S هذه المساحة

$$S = 4\text{cm}^2 \times \int_0^{\frac{1}{2}} (f(x) - x) dx \text{ و منه}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (f(x) - x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} 1 + (2x-1)e^{2x} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (2x-1)e^{2x} dx + \int_0^{\frac{1}{2}} 1 dx = 1 - \frac{e}{2} + [x]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} - \frac{e}{2}$$

$$S = 4\text{cm}^2 \times \left(\frac{3}{2} - \frac{e}{2} \right) = (6-2e) \text{ cm}^2 \text{ إذن}$$

<http://arabmath.com>