التمـــــــــرين الاول : البِنيـــــات الجَبريـــــــة

لتكن F المجمُوعة : $F=\left\{M(x,y)=\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & \frac{1}{x}\end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})/(x,y)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}\right\}$

1 ـ أ) لنبين ان F جزءُ مستقر من $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

لتكن $M(x,y)$ و $M(a,b)$ من F لدينَا

$$M(x,y)\times M(a,b)=\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & \frac{1}{x}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{1}{a}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} xa & xb+\frac{y}{a} \\ 0 & \frac{1}{xa}\end{pmatrix}$$
$$=M(xa,xb+\frac{y}{a})$$

و منه F جزءُ مستقر من $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

ب) لنبين أَن $(F,\times)$ زُمرة غير تبادلية

(1) بمَا أَن F جزءُ مستقر من $(M_2(\mathbb{R}),\times)$ و $\times$ تجميعي في $M_2(\mathbb{R})$ فإِن $\times$ تجميعي في F

(2) لدينَا $I=M(1,0)\in F$ العنصر المحايد في F بالنسبة ل $\times$ في F

(3) كل عنصر $M(x,y)$ من F يقبل $M(\frac{1}{x},-y)$ مُماثل له بالنسبة ل $\times$ في F

(4) $\times$ غير تبادلي في F , لدينَا مثَال مُضَاذ :

$$M(1,1)\times M(2,3)=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & \frac{7}{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

و $$M(2,3)\times M(1,1)=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

و منه $M(1,1)\times M(2,3)\neq M(2,3)\times M(1,1)$

2 ـ لتكن $G=\{M(x,0)\in F/x\in\mathbb{R}^*\}$ لنبين أَن G زُمرة جُزئِية من $(F,\times)$

(1) لدينَا $G\neq\varnothing$ لأَن $I\in G$

(2) ليكن x و a من $\mathbb{R}^*$ لدينَا : $M(x,0)\times M(a,0)^{-1}=M(x,0)\times M(\frac{1}{a},0)=M(\frac{x}{a},0)$

3 ـ ليكن $E=\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}.$

نزُود E بقانُون التركيب الداخلي $\perp$ $\forall(x,y)\in E,\forall(a,b)\in E:(x,y)\perp(a,b)=(xa,xb+\frac{y}{a})$

نعتبر التطبيق : $\begin{array}{ccc}\phi:(F,\times) & \mapsto & (E,\perp)\\ M(x,y) & \mapsto & (x,y)\end{array}$

أ) $(2,3)\perp(1,1)=(2,5)$ و $(1,1)\perp(2,3)=(2,\frac{7}{2})$

ب) (1) لنبين ان ϕ تشاكل : لتكن $M(x,y)$ و $M(a,b)$ عنصرين من F; لدينَا

$\phi(M(x,y)\times M(a,b))=\phi(M(xa,xb+\frac{y}{a}))$: حسب الجواب 1) أ)

ولدينَا كذلك من جهة ثانية

$\phi(M(xa,xb+\frac{y}{a}))=(xa,xb+\frac{y}{a})=(x,y)\perp(a,b)=\phi(M(x,y)\perp\phi(M(a,b))$: ومنه

$\phi(M(x,y)\times M(a,b))=\phi(M(x,y)\perp\phi(M(a,b))$

(2) لنبين ان ϕ تقابل :

كل زوج (x,y) من E يحدِد مصفُوفة وحيدة $M(x,y)$ من F بحيثُ $\phi(M(x,y))=(x,y)$

ج) من السُؤال السابق نستنتجُ ان $(E,\perp)$ و $(F,\times)$ لهمَا نفس البنية الجبرِية , إِذن $(E,\perp)$ زُمرة غير تبادلية

.

التمـــــرين الثاني : الأَعـــداد العقديــــة

m عدَدُ عقديٌ بحيث $m \neq 1$

I− نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $(E): z^2-(1-i)(1+m)z-i(m^2+1)=0$:

1− أَ)لنتحقَق من أَن $\Delta=[(1+i)(m-1)]^2$

لدينَا $\Delta=[(1-i)(1+m)]^2+4i(m^2+1)$

بمَاأَن $(1-i)^2=-2i$ و $(1+i)^2=2i$ فإِن

$$\Delta=2i(m^2-2m+1)=(1+i)^2(m-1)^2=[(1+i)(m-1)]^2$$

ب) لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E)

E تقبل حلين همَا : $z_1=\dfrac{(1-i)(1+m)-(1+i)(m-1)}{2}=1-im$ و

$$z_2=\frac{(1-i)(1+m)+(1+i)(m-1)}{2}=m-i$$

ج) $z_1z_2=1 \Leftrightarrow (1-im)(m-i)=1 \Leftrightarrow -i(m^2+1)=1$

$$\Leftrightarrow m^2+1=i \Leftrightarrow m^2=-1+i$$

نضع $m=x+iy$ المتساوية $m^2=-1+i$ تصبح تكافيء النظمة (S) التالية :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2} \\ y^2=\dfrac{\sqrt{2}+1}{2} \\ 2xy=1 \end{cases} \quad (S)\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=-1 \\ x^2+y^2=\sqrt{2} \\ 2xy=1 \end{cases}$$

بمَاأَن x و y لهمَا نفس الاِشارة فإِن

$$m=\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} \text{ أَو } m=-[\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}]$$

2− في حالة $m=e^{i\theta}$ و $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$, لدينَا :

$$z_1=1-im=1+e^{i(\theta-\frac{\pi}{2})}=e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})}(e^{-i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})}+e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})})=2\cos(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})}$$ و

بمَاأَن $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ فإِن $0<\dfrac{\theta}{2}-\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\pi}{2}$ ومنه

$$z_1=2\cos(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})\left(\cos(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})+i\sin(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})\right)$$

$$z_2=m-i=e^{i\theta}+e^{-i\frac{\pi}{2}}=e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})}\left(e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}+e^{-i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}\right.$$

و بمَاأَن $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ فإِن $\frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} < \pi$ ومنه
$$z_2 = 2e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{4})}\ cos(\frac{3\pi}{4} - \frac{\theta}{2}) = 2\ cos(\frac{3\pi}{4} - \frac{\theta}{2})\left(\cos(\frac{\theta}{2} + \frac{3\pi}{4}) + i\sin(\frac{\theta}{2} + \frac{3\pi}{4})\right)$$

II نعتبر النقط $M(m)$, $M_1(z_1)$ و $M_2(z_2)$

1 تكُون النقط M_2, M_1, M مستقمية إِذَا وفقط إِذَا كان $\frac{z_1 - m}{z_2 - m} \in \mathbb{R}$ أَي $\frac{1 - im - m}{-i} \in \mathbb{R}$ أَي $i + m - im \in \mathbb{R}$

نضع $m = x + iy$ مع $(x, y \in \mathbb{R}, (x, y) \neq (1, 0))$ ومنه مجمُوعة النقط M بحيث M_2, M_1, M مستقمية هي التي تحقِق $i + x + iy - i(x + iy) \in \mathbb{R}$ اي $1 + y - x = 0$ اي مستقيم معَادلته $1 + y - x = 0$ محروم من النقطة $A(1, 0)$

2- أَ) لتكن $M(z)$ و $M'(z')$ بحيث $z' = 1 - iz$

لدينَا التحويل R يقبل نقطة صامدة لحقهَا ω يحقِق $\omega = 1 - i\omega \Leftrightarrow \omega = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$ ومنه $z' = 1 - iz \Leftrightarrow z' - \omega = -i(z - \omega)$ و منه $\forall z \in \mathbb{C}, z \neq \omega, \frac{z' - \omega}{z - \omega} = -i.$

لتكن Ω النقطة ذات اللّحِق $\omega = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$ نستنتج ان $\Omega M' = \Omega M.$ $\overline{\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right)} \equiv -\frac{\pi}{2}[2\Pi]$ إِدن R دوران مركزه Ω و قياس زاويته $-\frac{\pi}{2}$

ب) نضع $m = x + iy,$
$$\frac{z_2 - z_1}{z_2 - m} \in I\mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{m - i - 1 + im}{m - i - m} \in I\mathbb{R} \Leftrightarrow i(x + iy - i - 1 + ix - y) \in I\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow -y + 1 - x = 0 \Leftrightarrow Re(m) + Im(m) = 1$$

ج) لدينَا $z_1 = 1 - im \Rightarrow R(M) = M_1$ ومنه المثلث $\Omega M M_1$ قائِم الزاوية في Ω ومنه توجد دائِرة (C) وحيدة تمر من M, M_1 و Ω بحيث $[MM_1]$ قطر فيهَا، و هي الدائِرة المحيُطة بِالمثلث $\Omega M M_1$.
و منه تكون النقط Ω, M, M_1 و M_2 متداورة يكافيءِ $M_2 \in (C)$ يكافيءِ $M_2 M M_1$ قائِم الزاوية في M_2 يكافيءِ $\overline{\left(\overrightarrow{M_2 M}, \overrightarrow{M_2 M_1}\right)} \equiv \pm\frac{\pi}{2}[2\Pi]$ يكافيءِ $arg(\frac{z_2 - z_1}{z_2 - m}) \equiv \pm\frac{\pi}{2}[2\pi]$ يكافيءِ $\frac{z_2 - z_1}{z_2 - m} \in I\mathbb{R}$ يكافيءِ حسبَ السُؤال السابق $Re(m) + Im(m) = 1$

إِذن مجموعة النقط $M(m)$ اللَتي تحقِق Ω, M, M_1 و M_2 متداورة هي المستَقيم الذي معادلته $x + y - 1 = 0$: محروم من النقطة $A(1, 0)$

.

التمـــــــرين الثالث : الحـــسابـــــــــيات

لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضـــع : $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$

1 أَ) لنتحـــقــق من انه لكل n من $\mathbb{N}^*$ a_n عدَد زوجي
$$2 \equiv 0[2] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, 2^n \equiv 0[2]$$
$$3 \equiv 1[2] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, 3^n \equiv 1[2]$$

$6 \equiv 0[2] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, 6^n \equiv 0[2]$

ومنه $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1 \equiv 1 - 1 \equiv 0[2]$

إِذن لكل n من $\mathbb{N}^*$ a_n عدَد زوجي

ب) لنُحَدِد قيم n التي يكون من اجلها $a_n \equiv 0[3]$ $2 \equiv -1[3] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, 2^n \equiv (-1)^n[3]$

$3 \equiv 0[3] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, 3^n \equiv 0[3]$

$6 \equiv 0[0] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, 6^n \equiv 0[3]$

ومنه $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1 \equiv (-1)^n - 1 \equiv 0[3]$ إِذَا وفقط إِذَا كان n عدَد زوجي

2- ليكن p عدَدَا أَوليَا بحيث $p > 3$

أَ) بمَا أَن $p > 3$ و p أَولي فإِن $p \barwedge 2 = p \barwedge 3 = 1$ و $p \barwedge 6 = 1$ فإِنه حسَبَ مبرهَنة $(Fermat)$
$2^{p-1} \equiv 1[p], 3^{p-1} \equiv 1[p]$ و $6^{p-1} \equiv 1[p]$

بِلدينَا $6a_{p-2} = 3 \times 2^{p-1} + 2 \times 3^{p-1} + 6^{p-1} - 6$ من السُؤال السابق نستنتج ان
$6a_{p-2} = 32^{p-1} + 23^{p-1} + 6^{p-1} - 6 \equiv 3 + 2 + 1 - 6 \equiv 0[p]$

ومنه $p/6a_{p-2}$ و بمَا أَن $p \barwedge 6 = 1$ فإِن حسبَ مبرهَنة $(GAUSS)$ p/a_{p-2}

ج) ليكن q عدَدَا أَوليَا

الحالة I : $q = 2$ من السُؤال 1- أَ) $\forall k\mathbb{N}^*, q/a_k$ و $a_k \barwedge q = q$ ومنه $n = k$

الحالة II : $q = 3$ من السُؤال 1- ب) $\forall k\mathbb{N}^*, q/a_{2k}$ و $a_{2k} \barwedge q = q$ ومنه $n = 2k$

الحالة III : $q > 3$ من السُؤال 2- ب) q/a_{q-2} و $a_{q-2} \barwedge q = q$ ومنه $n = q - 2$

.

مسأَلة : التحـــــليـــــــل

ليكن n من $\mathbb{N}^*$ نعتبر الدالة $f_n : [0, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ المعرفة بمَا يلي $f_n(x) = x(1 - ln(x))^n$: إِذَا كان $x > 0$ و $f_n(0) = 0$

(C_n) منحناهَا في مَعلم مُتعامد مُمنظم $(O; \vec{i}, \vec{j})$

الجُزء الاوَل

1- أَ) إِتصال f_n عَلَى اليمين في الصفر

لنبين ان $f_n(0) = \lim_{x \to 0^+} f_n(x)$

بوضع $t^n = x$ نحصل عَلَى

$\lim_{x \to 0^+} f_n(x) = \lim_{t \to 0^+} t^n(1 - nln(t))^n = \lim_{t \to 0^+} (t - ntln(t))^n = 0 = f_n(0)$ لأَن $\lim_{t \to 0^+} tln(t) = 0$

ب) قابليّة اشتِقاق f_n عَلَى اليمين في الصفر

لنحسب $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f_n(x)-f_n(0)}{x-0}$

لدينَا $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f_n(x)-f_n(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} (1-ln(x))^n = +\infty$ لأَن $\lim\limits_{t\to 0^+} -ln(t) = +\infty$ إِذن f_n غير قابلة لِلإِشتِقاق عَلَى اليمين في الصفر

ج) $\lim\limits_{x\to +\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} x(1-ln(x)) = -\infty$ $\qquad \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f_1(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} (1-ln(x)) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f_2(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} x(1-ln(x))^2 = +\infty$ $\qquad \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f_2(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} (1-ln(x))^2 = +\infty$

2- أَ) تغيرات f_1

لدينَا f_1 قابلة لِلإِشتِقاق علَى $\mathbb{R}_+^*$ و $\forall x>0, f_1'(x) = 1-ln(x)-1 = -ln(x)$

جدول تغيرات f_1

x	0		1		$+\infty$
$f_1'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	
$f_1(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

2- ب) تغيرات f_2

لدينَا f_2 قابلة لِلإِشتِقاق علَى $\mathbb{R}_+^*$ و

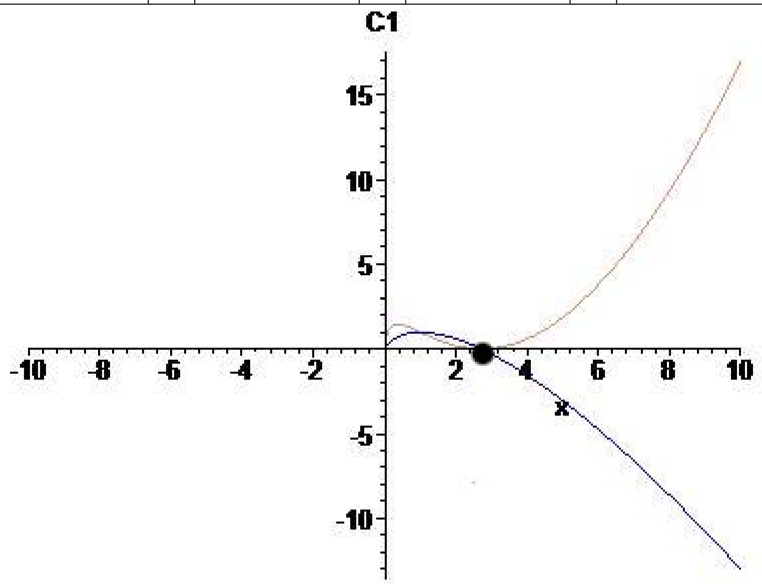
$\forall x>0, f_2'(x) = (1-ln(x))^2 - 2x\dfrac{1}{x}(1-ln(x)) = (ln(x)-1)(1+ln(x))$

x	0		e^{-1}		e		$+\infty$
$f_2'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f_2(x)$	0	$\nearrow$	$4e^{-1}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3- أَ) دراسة الوضع النسبي ل (C_1) و (C_2) :

$\forall x\in \mathbb{R}_+^*, f_1(x)-f_2(x) = x(1-ln(x)(1-1+ln(x)) = xln(x)(1-ln(x))$

x	0		1		e		$+\infty$
$f_1(x)-f_2(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
الوضع النسبي		C_2 فوق C_1		C_1 فوق C_2		C_2 فوق C_1	



اَلجُزء الثاني

1- نعتبر الدالة F بحيثُ : $\forall x \le 0, F(x)=\int_{e^x}^{1}\frac{f_1(t)}{1+t^2}dt$

أَ) اَلدالة $t :\mapsto \frac{f_1(t)}{1+t^2}$ مُتصلة علَى $[0,+\infty[$ و الدالة $u : x \mapsto e^x$ قابلة لِلإِشتِقاق علَى $]-\infty,0]$ و $u(]-\infty,0]) \subset [0,+\infty[$ و منه F قابلة لِلإِشتِقاق علَى $]-\infty,0]$ و ان

$$\forall x<0, F'(x)=-e^x\frac{(f(e^x))}{1+e^{2x}}=-\frac{e^xe^x(1-ln(e^x))}{1+e^{2x}}=\frac{e^{2x}(x-1)}{1+e^{2x}}$$

ب) F تناقصية علَى $]-\infty,0]$

2- أَ) ليكن x من $]-\infty,0]$ لدينَا $\forall t\in[e^x,1], 2\ge 1+t^2\ge 1+e^{2x}$ و $0\le f_1(t)$ ومنه

$$\forall t\in[e^x,1], \frac{1}{2}f_1(t)\le\frac{1}{1+t^2}f_1(t)\le\frac{1}{1+e^{2x}}f_1(t)$$

و منه

$$\int_{e^x}^{1}\frac{1}{2}f_1(t)dt\le\int_{e^x}^{1}\frac{1}{1+t^2}f_1(t)dt\le\int_{e^x}^{1}\frac{1}{1+e^{2x}}f_1(t)dt$$

آي

$$\frac{1}{2}\int_{e^x}^{1}f_1(t)dt\le F(x)\le\frac{1}{1+e^{2x}}\int_{e^x}^{1}f_1(t)dt$$

2- ب) لكل x من $]-\infty,0]$ لدينَا $\left(x^2(\frac{3}{4}-\frac{ln(x)}{2})\right)'=f_1(x)$

ج) $\int_{e^x}^{1}f_1(t)dt=\left[t^2(\frac{3}{4}-\frac{ln(t)}{2})\right]_{e^x}^{1}=\frac{3}{4}-e^{2x}(\frac{3}{4}-\frac{x}{2})$ و بما أَن $\lim_{x\to-\infty}e^{2x}(\frac{3}{4}-\frac{x}{2})=0$ فإِن

$$\lim_{x\to-\infty}\int_{e^x}^{1}f_1(t)dt=\frac{3}{4}$$

3- من السُؤال 2- ب) نستنتج ان $\frac{3}{8}\le l\le\frac{3}{4}$

اَلجُزء الثالث

لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع $u_n=\int_{1}^{e}f_n(t)dt$

1- أَ) ليكن n من $\mathbb{N}^*$ لدينَا $\forall x\in[1,e], f_n(x)\ge 0$ ومنه $u_n=\int_{1}^{e}f_n(t)dt\ge 0$

ب) ليكن x من $[1,e]$ لدينَا

$$f_{n+1}(x)-f_n(x)=x(1-ln(x))^n(1-ln(x)-1)=-xln(x)(1-ln(x))^n$$

و لدينَا

$$1\le x\le e\Rightarrow\begin{cases}0\le ln(x)\\ 0\le 1-ln(x)\\ 0\le(1-ln(x))^n\end{cases}$$

ومنه $\forall x\in[1,e], f_{n+1}(x)-f_n(x)\le 0$

ج)ليكن $n\in\mathbb{N}^*$ من السُؤَال السابق بمكاملة المتفاوتة $f_{n+1}-f_n\le 0$ عَلَى $[1,e]$ نحصل عَلَى
$u_{n+1}\le u_n$

د) (u_n) مصغورة بالصفر حسب (1- أَ)) و تناقصية حسب (1- ج))

2- أَ) ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ نضع $u'(x) = x, \quad v(x) = (1 - ln(x))^{n+1}$
$u(x) = \frac{x^2}{2}, \quad v'(x) = -(n+1)\frac{(1-ln(x))^n}{x}$
ومنه $u_{n+1} = \int_1^e x(1-ln(x))^n dx = \left[\frac{x^2}{2}(1-ln(x))^{n+1}\right]_1^e + \frac{(n+1)}{2}\int_1^e x(1-lnx)^n dx$
$\forall n \geq 1, u_{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2}u_n$

ب) لتكن $\mathcal{A}$ مساحة حيز المستوَى المحصور بين C_1 و C_2 و المستقيمين الذين معادلتيهمَا علَى التوالِي $x = 1$ و $x = e$ بالسنتمتر .

$$\mathcal{A} = \int_1^e |f_2(x) - f_1(x)|dx \times 4cm^2 = u_1 - u_2 \times 4cm^2$$

ولدينَا حسبَ (2- أَ)) $u_1 - u_2 = \frac{1}{2}$ ومنه $\mathcal{A} = 2cm^2$

3- أَ) لكل $n \geq 2$ حسب (2- أَ)) $u_n - \frac{1}{n+1} = (n+1)u_n - 1 = 2u_{n+1}$ وبمَا أَن حسب (1- أَ)) $u_{n+1} \geq 0$ فإن $u_n - \frac{1}{n+1} \geq 0$ إذن $u_n \geq \frac{1}{n+1}$
ولدينَا لكل $n \geq 2$ حسب (2- أَ)) $2u_{n+1} + 1 = (n+1)u_n$ و بمَا أَن (u_n) تناقصية فإِن $2u_{n+1} + 1 \leq 2u_n + 1$ ومنه $(n+1)u_n \leq 2u_n + 1$ ومنه $u_n \leq \frac{1}{n-1}$ وبالتالي
$$\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n-1}$$

ب) من السُؤَال السابق نستنتج $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, $\lim_{n\to+\infty} nu_n = 1$

4- $a \in \mathbb{R}$ بحيث $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2}v_n, v_1 = a;\ a \neq u_1$ و $\forall n \geq 1, d_n = |v_n - u_n|$

أَ) لنبين بالترجع أَنَ $\forall n \geq 1, d_n = \frac{n!}{2^{n-1}}d_1$
لدينَا من آجل $n = 1$: $d_1 = d_1$

ليكن $n \geq 1$ نَفترِض أَنَ $d_n = \frac{n!}{2^{n-1}}d_1$ لدينَا
$$d_{n+1} = |v_{n+1} - u_{n+1}| = \frac{(n+1)}{2}|v_n - u_n| = \frac{(n+1)}{2}d_n = \frac{(n+1)!}{2^n}d_1$$

ب) من السُؤَال السابق نستنتج أَن $\forall n \geq 1 : \frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{n+1}{2}$ ومنه $\forall n \geq 3 \Rightarrow \frac{n+1}{2} \geq 2 \Rightarrow, \frac{d_{n+1}}{d_n} \geq 2$ وبالترجع نحصل عَلَى $d_n \geq 2^{(n-3)}d_3$ وبماأَن $\lim_{n\to+\infty} 2^{(n-3)}d_3 = +\infty$ فإِنَ $\lim_{n\to+\infty} d_n = +\infty$

ج) إِذَ كانت (v_n) متقاربة و علمَا أَنَ (u_n) متقاربة و $d_n = |v_n - u_n|$ فإِنَ (d_n) ستَكونُ مُتقاربة و هذَا تنَاقضُ