فرض منزلي 1

ذ عمر ايت ابراهيم

1- حدد مجموعة تعريف الدوال التالية :

أ: $f(x)=\frac{x+3}{x-5}$ ب) $f(x)=\frac{x^2+3x-1}{x^2-9}$

ج: $f(x)=\sqrt{x^2+3x}$ د) $f(x)=\frac{\sqrt[3]{x^2+3x}}{x-1}$

2- لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$f(x)=x-\sqrt[3]{x+1}$$

أ: حدد مجموعة تعريف الدالة f (علل جوابك)

ب: أدرس اتصال f على مجموعة تعريفها

ج: قارن العددين $\frac{1}{2}$ و $\sqrt[3]{3/2}$ ثم استنتج أنه يوجد عدد α من $]\frac{1}{2},7[$ بحيث $f(\alpha)=0$

3- لتكن f الدالة العددية المعرفة ب $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$

أ: حدد D_f ثم ادرس اتصال f على $[2,3]$

ب: حدد صورة المجال $[2,3]$ بالدالة f

ج: هل المعادلة $f(x)=5$ تقبل حلا على المجال $[2,3]$ ؟

4- حل في $\mathbb{R}$ المعادلتين :

أ: $\sqrt[5]{x^2}+2\sqrt[5]{x}-1=0$

ب: $(x+2)^3=-4$

5- احسب النهايات التالية :

أ: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt[3]{x-1}}$

ب: $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3-x}-x)$

ج: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1-x}-1}{\sin(x)}$

6- لتكن f الدالة العددية المعرفة ب: $f(x)=\sqrt[3]{x^2+x}$

1- حدد D_f مجموعة تعريف f

2- احسب النهايات التالية

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

ج: بين أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا على الأقل في المجال $[1,2]$

① - مجموعة تعريف الدوال التالية :

أ : $f(x)=\frac{x+3}{x-5}$ $D_f=\mathbb{R}-\{5\} \quad x\neq 5 \Leftrightarrow x-5\neq 0 \Leftrightarrow f(x)\in\mathbb{R}$

ب : $f(x)=\sqrt[3]{x^2+3x}$ $x(x+3)\geq 0 \Leftrightarrow x^2+3x\geq 0 \Leftrightarrow f(x)\in\mathbb{R}$

للمعادلة $x(x+3)=0$ حلين مختلفين $x=0$ و $x=-3$ $\begin{array}{ccccccc} -\infty & & -3 & & 0 & & +\infty \\ & + & 0 & - & 0 & + & \end{array}$

$D_f =]-\infty,-3]\cup[0,+\infty[$

د : $f(x)=\frac{\sqrt[3]{x^2+3x}}{x-1}$; $]-\infty,-3]\cup[0,1[\cup]1,+\infty[\Leftrightarrow x^2+3x\geq 0$ و $x-1\neq 0 \Leftrightarrow f(x)\in\mathbb{R}$

---

② - لنكن $f(x)=x-\sqrt[3]{x+1}$

أ - لدينا $D_f=[-1,+\infty[\quad x\geq -1 \Leftrightarrow x+1\geq 0 \Leftrightarrow f(x)\in\mathbb{R}$

ب - f دالة متصلة على $[-1,+\infty[$ لأن $x\to x+1$ متصلة على $\mathbb{R}$

و $x+1$ موجبة على $[-1,+\infty[$ إذاً $x\to\sqrt[3]{x+1}$ متصلة على $[-1,+\infty[$

كمركب دالتين متصلتين ، ومنه $x\mapsto x-\sqrt[3]{x+1}$ مجموع دالتين متصلتين متصلة

على $[-1,+\infty[$

ج : لنقارن $\sqrt[3]{3/2}$ و $\frac{1}{2}$ نقارن $\sqrt[3]{1/8}$ و $\sqrt[3]{3/2}$ $\Leftrightarrow$ مقارنة $\frac{3}{2}$ و $\frac{1}{8}$

$\frac{1}{8}-\frac{3}{2}=\frac{1-12}{8}=-\frac{11}{8}<0$ يعني أن $\frac{1}{8}<\frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}<\sqrt[3]{3/2}$

" الدالة $x\to\sqrt[3]{x}$ تزايدية قطعاً على $[0,+\infty[$ "

إستنتاج : لدينا f دالة متصلة على $[-1,+\infty[$ وخاصة على $[\frac{1}{2},7]$

لدينا $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}-\sqrt[3]{3/2}<0$ و $f(7)=7-\sqrt[3]{8}=5$ ، ومنه $f(\frac{1}{2})f(7)<0$

حسب مبرهنة القيم الوسيطية يوجد α من $]\frac{1}{2},7[$ حيث $f(\alpha)=0$

---

③ : أ : $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$; $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$. f متصلة على D_f لأنها خارج دالتين

حدوديتين متصلتين و $x-1\neq 0$ إذا متصلة خاصة على $]2,3[$

و $\lim_{x\to 2^+} f(x)=\frac{2+1}{2-1}=3=f(2)$ و $\lim_{x\to 3^-} f(x)=\frac{3+1}{3-1}=2=f(3)$ إذا متصلة على $[2,3]$

ب : صورة المجال $[2,3]$

لدينا $f'(x)=\frac{-2}{(x-1)^2}<0$ إذا تناقصية قطعا على D_f وخاصة على $[2,3]$

و f دالة متصلة على $[2,3]$ ومنه $f([2,3])=[f(3);f(2)]=[2,3]$

ج : العدد 5 لا ينتمي إلى $[2,3]$ الذي به صور عناصر المجال $[2,3]$ إذا $f(\alpha)=5$

لا تقبل حلا على $[2,3]$. كل الصور بين 2 و 3

---

④ : لنحل في $\mathbb{R}$: أ : $(\sqrt[5]{x})^2+2\sqrt[5]{x}-1=0$ أولاً الشرط (($x\geq 0$))

لدينا $(\sqrt[5]{x})^2+2\sqrt[5]{x}+1-2=0 \Leftrightarrow (\sqrt[5]{x}+1)^2-\sqrt{2}^2=0$

$(\sqrt[5]{x}+1-\sqrt{2})(\sqrt[5]{x}+1+\sqrt{2})=0 \Leftrightarrow \sqrt[5]{x}+1-\sqrt{2}=0$ أو $\sqrt[5]{x}+1+\sqrt{2}=0$

$\sqrt[5]{x}=\sqrt{2}-1>0 \Rightarrow x=(\sqrt{2}-1)^5$ لا يمكن مجموع موجبين $\neq 0$

ب : $(x+2)^3=-4$ لدينا $x+2\leq 0 \Rightarrow x\leq -2$

$(-(x+2))^3=4 \Rightarrow -(x+2)=\sqrt[3]{4} \Rightarrow x=-2-\sqrt[3]{4}$

omar ait brahim