الفشتالي التاهيلية

ذ عمر

# فرض محروس

**التمرين الأول: (08 نقط)**

I) نضع لكل $x>0$ ولكل $n$ من $\mathbb{N}^*$:
$$I_n(x)=\int_0^x \frac{t^n e^{-t}}{n!}\,dt$$

1- أ: احسب $I_1(x)$ ب) بين أنه لكل $x>0$، لكل $n$ من $\mathbb{N}^*$
$$0\le I_n\le \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

ج: باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن $I_n(x)=I_{n-1}(x)-\frac{x^n e^{-x}}{n!}$

د: استنتج أن $I_n=1-e^{-x}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right)$

2- نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ حيث $u_n=\int_0^1\frac{t^n}{n!}\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)dt$

نضع $S_n=\sum_{k=0}^{n}u_k$

أ: أثبت أن: $S_n=\int_0^1\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}\right)\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)dt$

ب: بين أن لكل $n\ge 1$
$$\int_0^1 e^x\frac{(e^x-e^{-x})}{2}\,dx-S_n=\int_0^1 e^x I_n(x)\cdot\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)dx$$

ج: باستعمال ب، أ، بين أن:
$$\left|\int_0^1 e^x\frac{(e^x-e^{-x})}{2}\,dx-S_n\right|\le\frac{1}{(n+1)!}\,\frac{e-e^{-1}}{2}$$

د: احسب $\lim S_n$

II) لتكن $f$ الدالة العددية المعرفة بما يلي:
$$\begin{cases} f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2x}, & x\neq 0\\ f(0)=1 \end{cases}$$

1- أ: بين أن $f$ زوجية

ب: احسب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$

ج: بين أن $f$ متصلة على $\mathbb{R}$

د: احسب $f'(x)$ لكل $x$ من $\mathbb{R}_+^*$ وضع جدول تغيرات $f$

2- نضع
$$\begin{cases} F(x)=\int_x^{2x}f(t)\,dt\\ F(0)=0 \end{cases}$$

أ: علل وجود $F(x)$ لكل $x$ من $\mathbb{R}$ وأثبت أن $F$ دالة فردية

ب: بين أن $\frac{e^x-e^{-x}}{2}\le F(x)\le\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{4}$ $\forall x>0$

واستنتج $\lim_{x\to0^+}F(x)$ ، $\lim_{x\to+\infty}F(x)$ ، $\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}$

ج: أثبت أنه يوجد $c_x$ من $[0,2x]$ بحيث: $\frac{F(x)}{x}=f(c_x)$ ، واستنتج $\lim_{x\to0^+}\frac{F(x)}{x}$ ثم أول هندسيا النتيجة

د: أثبت أن
$$\forall x>0\quad F'(x)=\left(e^x+e^{-x}-1\right)f(x)$$

ضع جدول تغيرات $F$

5: ارسم $C_F$ في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

التمرين الثاني : ( 4,50 ن )

1) ليكن $z$ عددا عقديا غير منعدم بحيث $\arg z \equiv \alpha [2\pi]$ , $-\pi < \alpha < \pi$

نضع $z = a+bi$ حيث $(a,b) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

أ : بين أن $\frac{\sin\alpha}{1+\cos(\alpha)} = \frac{b}{a+\sqrt{a^2+b^2}}$

ب : استنتج أن $\alpha = 2\arctan\left(\frac{b}{a+\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

2) ليكن $u = 1+e^{i\pi/3}$

أ : حدد الشكل المثلثي للعدد $u$

ب : استنتج أن $\arctan(2-\sqrt{3}) = \pi/12$

3) نضع $t = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{3}{4}\right)^k i^{n-k}$ حيث $n \in \mathbb{N}$

بين أن $|t| = (5/4)^n$ , $\arg t \equiv 2n\arctan(\frac{1}{2}) [2\pi]$

التمرين الثالث : ( 04,00 ن )

نعتبر الدالة العددية $g$ المعرفة بما يلي : $g(x) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\cos(x)$

1) أ : بين أن $\pi/6$ حل للمعادلة $g(x) = x$

ب : بين أن $|g'(x)| \leq \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ $(\forall x \in \mathbb{R})$

2) لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي $u_0 = \pi/4$ , $u_{n+1} = g(u_n)$ ; $n \in \mathbb{N}$

أ : بين أن $0 \leq u_n \leq \pi/2$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

ب : بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) : |u_{n+1} - \frac{\pi}{6}| \leq \frac{\pi}{3\sqrt{3}} |u_n - \pi/6|$

ج : استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة، وحدد نهايتها .

التمرين الرابع : ( 3,5 ن )

ليكن $x$ من $]0,\pi[$ , نضع لكل $n$ من $\mathbb{N}$

$$u_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

1 - بين أن

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n(x) = \sin(x) + (-1)^n \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} \sin(t)\,dt$$

2 - بين أن :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; \quad |u_n(x) - \sin(x)| \leq \pi \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

3 - نضع $v_n = \frac{x^n}{n!}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

احسب $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ ثم استنتج $\lim v_n(x)$

4 - استنتج مما سبق أن

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \pi^{2k+1}}{2^{2k+1}(2k+1)!} = 1$$