دالة اللوغاريتم النبيري

1 تعريف

الدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ متصلة على المجال $]0,+\infty[$ ، إذن تقبل دوال أصلية على المجال $]0,+\infty[$.

التعريف

الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ على $]0,+\infty[$ والتي تنعدم في 1 تسمى دالة اللوغاريتم النبيري، نرمز لها بالرمز ln.

نتائج مباشرة

- مجموعة تعريف الدالة ln هي $]0,+\infty[$.
- $\ln 1 = 0$.
- الدالة ln قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ ولدينا $\forall x \in]0,+\infty[\ , \ \ln'(x) = \frac{1}{x}$.

2 منحى تغيرات الدالة ln

الخاصية

الدالة ln تزايدية قطعا على المجال $]0,+\infty[$.

برهان :

بما أن الدالة ln قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و $\forall x \in]0,+\infty[\ \ln'(x) > 0$ فإن f تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$.

استنتاج

لكل عددين حقيقيين موجبين قطعا x و y ، لدينا :

- $\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$.
- $\ln x < \ln y \Leftrightarrow x < y$
- $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$.
- $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$
- $\ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$

ملاحظة

- لحساب $\ln(x)$ باستعمال آلة حاسبة ، نستعمل الزر $\boxed{\ln}$.

مثال

باستعمال آلة حاسبة نحصل على :

$\ln 2 \simeq 0,693$ و $\ln(0,5) \simeq -0,693$ و $\ln 10 \simeq 2,30$ و $\ln(2,718281828) \simeq 1$.

1 نهايتي الدالة ln عند $+\infty$ و عند 0 على اليمين.

الخاصية (تقبل)

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.

نتيجة :

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty$

برهان : نضع $X=\frac{1}{x}$ عندما يؤول x إلى 0 على اليمين فإن X يؤول إلى $+\infty$.

إذن : $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = \lim\limits_{X\to+\infty}\left(\ln\left(\frac{1}{X}\right)\right) = \lim\limits_{X\to+\infty}\left(-\ln(X)\right)$.

وبما أن $\lim\limits_{X\to+\infty}\left(\ln(X)\right) = +\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(x) = -\infty$.

تأويل هندسي

في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$، منحنى الدالة ln يقبل محور الأراتيب كمقارب عمودي.

2 نهايات أساسية :

الخاصية 1

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم. لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}=0$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(x^n\ln x\right)=0$.

تأويل هندسي

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ ، فإن منحنى الدالة ln يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$.

أمثلة : لنحسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ و $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x\ln\sqrt{x}\right)$:

- لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} 2\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ ، وبوضع $X=\sqrt{x}$ نجد $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{X\to+\infty} 2\frac{\ln X}{X} = 0$.
- $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x\ln\sqrt{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{2}x\ln x\right) = 0$.

الخاصية 2

لدينا : $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=1$ و $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h}=1$.

برهان : الدالة ln قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ و $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x-\ln 1}{x-1} = \ln'(1) = 1$.

نضع $1+h=x$ إذن $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = 1$.

دراسة الدالة $x \mapsto \ln x$

1 العدد e

الخاصية

يوجد عدد حقيقي وحيد موجب قطعا ، نرمز له بالرمز e يحقق $\ln e = 1$.

برهان :

الدالة ln متصلة وتزايدية قطعا على $]0,+\infty[$ ، إذن ln تقبل دالة عكسية معرفة من المجال J نحو المجال $]0,+\infty[$ ،
بحيث $J = \ln(]0\ ,\ +\infty[) =]\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x , \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x[=\mathbb{R}$ ، وبما أن $1\in\mathbb{R}$ ، فإنه يوجد عدد حقيقي وحيد e
بحيث $\ln e = 1$.

ملاحظة

- نقبل أن العدد e ليس عددا جذريا.
- باستعمال آلة حاسبة، بالضغط على التوالي على الأزرار $\boxed{\ln} \to \boxed{2nd} \to \boxed{1}$ نحصل على قيمة مقربة للعدد e :
$e \approx 2{,}71828$.

2 جدول تغيرات الدالة ln ومنحنى الدالة ln :

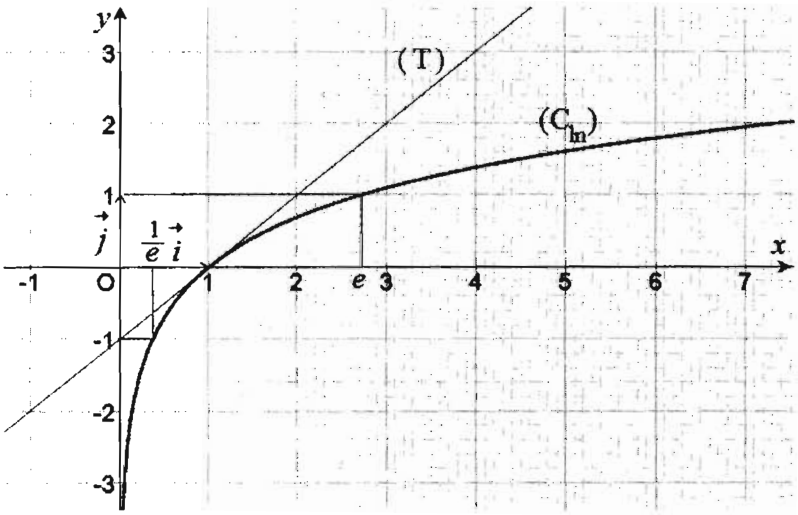
- جدول تغيرات الدالة ln

x	0	1	e	$+\infty$
$\ln'(x)$	‖ +	+	+	
$\ln x$	‖ $-\infty$ ↗	0 ↗	1 ↗	$+\infty$

- جدول إشارة الدالة ln

x	0	1	$+\infty$
إشارة $\ln(x)$	‖ $-$	0	$+$

- منحنى الدالة ln :



- معادلة المماس (T) لمنحنى الدالة ln عند النقطة $A(1\ ,\ 0)$ هي :
$y = \ln'(1).(x-1) + \ln 1$ ،
أي : $(T)\ :\ y = x - 1$.

- منحنى الدالة ln يقبل محور الأراتيب كمقارب ويقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$.

المشتقة اللوغاريتمية - الدوال الأصلية للدالة $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$

1 المشتقة اللوغاريتمية لدالة

نعتبر دالة u معرفة على مجال I ولا تنعدم عليه (أي : $\forall x \in I \ , \ u(x) \neq 0$).
نفترض أن u قابلة للاشتقاق على المجال I ، إذن u متصلة على I .
بما أن u لا تنعدم على I، فإنها لا تغير إشارتها على I .
ومنه $(\forall x \in I \ , \ u(x) > 0)$ أو $(\forall x \in I \ , \ u(x) < 0)$.
نعتبر الدالة f المعرفة على المجال I بما يلي : $\forall x \in I \ , \ f(x) = \ln|u(x)|$.

- إذا كان $\forall x \in I \ , \ u(x) > 0$ ، فإن $\forall x \in I \ , \ f(x) = (\ln \circ u)(x)$.

بما أن u قابلة للاشتقاق على I و $\forall x \in I \ , \ u(x) \in]0,+\infty[$ و $\ln$ قابلة للاشتقاق على I ،
فإنه حسب " خاصية مشتقة مركب دالتين " الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال I ،
ولدينا : $\forall x \in I \quad , \quad f'(x) = \ln'(u(x)) \times u'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

- إذا كان $\forall x \in I \ , \ u(x) < 0$، فإن $f(x) = \ln(-u(x))$.

ولدينا : $\forall x \in I \ , \ f'(x) = \ln'(-u(x)) \times (-u'(x)) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

خاصية وتعريف

لتكن u دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على المجال I .
إذا كانت u لا تنعدم على I ، فإن الدالة $x \mapsto \ln|u(x)|$ قابلة للاشتقاق على المجال I ولدينا :
$\forall x \in I \quad (\ln|u|)'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.
الدالة $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ تسمى **المشتقة اللوغاريتمية** للدالة u على المجال I .

مثال : نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $\forall x \in \mathbb{R} \ , \ f(x) = \ln(x^2+1)$.
الدالة $u : x \mapsto x^2+1$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $\forall x \in \mathbb{R} \ , \ u(x) > 0$.
إذن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا $\forall x \in \mathbb{R} \ , \ f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.

2 الدوال الأصلية للدالة $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$

الخاصية

إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I ولا تنعدم عليه، فإن الدوال الأصلية للدالة $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ على I ، هي الدوال $x \mapsto (\ln|u(x)|) + k$ حيث k عدد حقيقي ثابت.

مثال :

الدالة $x \mapsto \ln(2x+1)$ دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{2}{2x+1}$ على المجال $]-\frac{1}{2},+\infty[$.

دالة اللوغاريتم للأساس a

1 تعريف وخاصيات جبرية

التعريف

ليكن a عددا حقيقيا موجبا قطعا ومخالفا للعدد 1.

الدالة $x \mapsto \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$ المعرفة على $]0,+\infty[$ تسمى دالة اللوغاريتم للأساس a ونرمز لها بالرمز $\log_a$.

ملاحظات

ليكن $a \in]0\,,1[\, \cup \,]1\,,+\infty[$.

- دالة اللوغاريتم النبيري هي دالة اللوغاريتم للأساس e .
- $\log_a(a) = 1$ و $\log_a(1) = 0$ ، ولكل عدد جذري r لدينا $\log_a(a^r) = r$.
- $\log_a(x) = \frac{1}{\ln a} \times \ln(x)$ ، $\forall x \in]0,+\infty[$ ، إذن $\log_a$ تحقق جميع الخاصيات الجبرية التي تحققها $\ln$.

الخاصيات

ليكن $a \in]0\,,1[\, \cup \,]1\,,+\infty[$. لكل عددين حقيقيين موجبين قطعا x و y ولكل عدد جذري r ، لدينا :

$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$ ؛ $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$ ؛ $\log_a(x^r) = r\log_a(x)$.

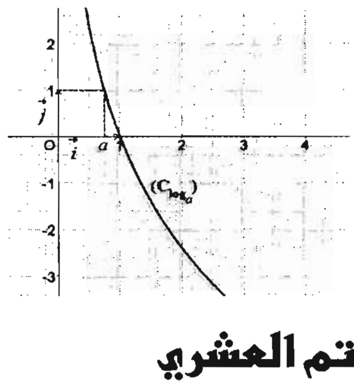
2 دراسة وتمثيل الدالة $\log_a$

ليكن $a \in]0\,,1[\, \cup \,]1\,,+\infty[$ ، لدينا $\forall x \in]0,+\infty[\,,\ \log_a{}'(x) = \frac{1}{x\ln a}$.

إذن تغيرات الدالة $\log_a$ مرتبطة بإشارة $\ln(a)$ ، ومنه النتائج التالية :

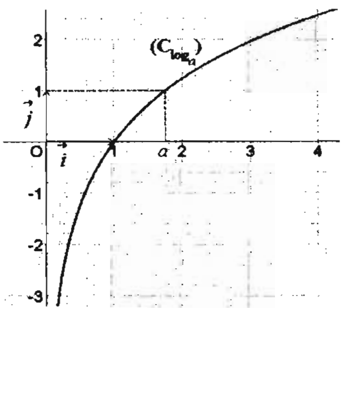
- إذا كان $0 < a < 1$

x	0	1	$+\infty$
$\log_a(x)$	$+\infty$	0	$-\infty$



- إذا كان $a > 1$

x	0	1	$+\infty$
$\log_a(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$



3 دالة اللوغاريتم العشري

التعريف

نسمي دالة اللوغاريتم العشري، الدالة اللوغاريتمية للأساس 10 ، نرمز لها بالرمز $\log$.

الخاصية

لكل عدد صحيح طبيعي n لدينا $\log(10^n) = n$.

تمـاريـن

1 بدون استعمال الآلة الحاسبة ، احسب ما يلي :

أ) $x = \ln 216 - 3(\ln 2 + \ln 3)$

ب) $y = 3(\ln 3 + \ln 5) - \ln 27 - 2\ln 10 - \ln \frac{1}{4}$

2 بسط كل من التعبيرين التاليين :

$$X = \frac{\ln(\sqrt{5}+1)+\ln(\sqrt{5}-1)}{2}$$

و $Y = \ln\left(2+\sqrt{3}\right)^5 + \ln\left(2-\sqrt{3}\right)^5$.

3 بسط العدد :

$$\ln\frac{1}{2} + \ln\frac{2}{3} + \ln\frac{3}{4} + \ldots + \ln\frac{98}{99} + \ln\frac{99}{100}$$

3 بسط الكتابات التالية :

أ) $\ln(e^3) + \ln(e^{-2})$ ب) $\ln\left(e^2\sqrt{e}\right)$

ج) $\ln\frac{1}{e^3}$ د) $\ln\sqrt{135} + \ln\sqrt{75} - \ln\sqrt{15} - \ln\sqrt{27}$

4 حل في المجموعة $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

أ) $\ln(x+3) + \ln(x+2) = \ln(x+11)$

ب) $\ln(x) + \ln(x-3) = 2\ln 2$

ج) $\ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right) = \ln(x-1) - \ln(x+2)$

د) $\frac{1}{2}\ln(2x) = \ln(3-x) - \ln\sqrt{x+1}$

5 حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية :

أ) $\ln(x+1) + \ln(x+2) \geq \ln(x+7)$

ب) $\ln(x^2-8) \leq \ln x + \ln 2$

ج) $\ln(3x^2-5x) \leq \ln x + \ln 2$

د) $\ln\sqrt{2x-3} + \ln(x+1) < \frac{1}{2}\ln(x-3)$

6 أ) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $X^2 + 3X - 4 = 0$

ب) استنتج مجموعة حلول المعادلة :

$$(\ln x)^2 + 3\ln x - 4 = 0$$

7 حل في $\mathbb{R}$ المعادلتين الآتيتين :

أ) $(\ln x)^2 - \ln x - 30 = 0$

ب) $(\ln x)^2 + 3\ln\frac{1}{x} - 10 = 0$

8 حل في $\mathbb{R}$ المتراجحتين الآتيتين :

أ) $2(\ln x)^2 + \ln x - 6 > 0$ ب) $2(\ln x)^2 - \ln x - 3 \leq 0$

9 في كل حالة حدد قيم العدد الصحيح الطبيعي n الذي يحقق المتفاوتة المقترحة :

أ) $\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 10^{-5}$ ب) $(0,9)^n \leq \frac{1}{10}$

ج) $0,2 \geq \left(\frac{2}{5}\right)^n$ د) $1-\left(\frac{4}{5}\right)^n \geq 0,97$

10 حل في $\mathbb{R}^2$ النظمات التالية :

أ) $\begin{cases} x+y=30 \\ \ln x + \ln y = 3\ln 5 \end{cases}$ ب) $\begin{cases} \ln(xy) = -5 \\ (\ln x)(\ln y) = -14 \end{cases}$

الدالة ln والنهايات

11 في كل حالة من الحالات التالية احسب نهاية $f(x)$ عندما يؤول x إلى 0 على اليمين :

أ) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ب) $f(x) = (\ln x)^2 - \ln x$

ج) $f(x) = \frac{x-\ln x}{x}$ د) $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$

هـ) $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$ و) $f(x) = x\ln\sqrt[3]{x}$

12 احسب النهايات التالية :

أ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x + x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$ ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x - \ln x)$

ج) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}$ د) $\lim\limits_{x\to+\infty}[x + \ln(x+1) - \ln x]$

13 في كل حالة من الحالات التالية احسب نهايات f عند محدات المجال I.

أ) $f(x) = \frac{1}{\ln x}$ و $I =]1,+\infty[$

ب) $f(x) = x(1-\ln x)$ و $I =]0,+\infty[$

ج) $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-2}\right)$ و $I =]-\infty,-1[$

د) $f(x) = \frac{\ln x - 1}{x}$ و $I =]0,+\infty[$

14 احسب النهايات التالية :

أ) $\lim\limits_{x\to0^+}[x(\ln x)^3]$ ب) $\lim\limits_{x\to0^+}[(\sin x)(\ln x)]$

ج) $\lim\limits_{x\to+\infty}[x^3 - 3x - \ln x]$ د) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{x^3+1}$

هـ) $\lim\limits_{x\to-\infty}[x + \ln(x^2+1)]$

و) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\ln(1+\sqrt{x}) - \frac{\ln x}{2}\right)$