السلسلة3

الدالة $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ معرفة على $\mathbb{R}_+ = [0,+\infty[$ متصلة و تزايدية قطعا على $[0,+\infty[$

لدينا :

$\sqrt[n]{x} = y \iff x = y^n$; $n \in \mathbb{N}^*$ $(x,y) \in [0,+\infty[^2$

$\sqrt[n]{x} \geq \sqrt[n]{y} \iff x \geq y$; $\forall (x,y) \in [0,+\infty[^2$

$\sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$; // //

$\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}$ $(y \neq 0)$; $\forall y \in]0,+\infty[; \forall x \in [0,+\infty[$

$\sqrt[n]{x^p} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^p$, $\sqrt[n]{\sqrt[p]{x}} = \sqrt[np]{x}$; $\forall n \in \mathbb{N}^*, p \in \mathbb{N}^*$

$\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$; $\forall x \in [0,+\infty[$

$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p}$; $q \in \mathbb{N}^*, p \in \mathbb{Z}$

تمارين :

① بسط العبارة التالية :

$$A = \sqrt[4]{9}\sqrt{\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{9}} \Big/ \sqrt[3]{81}\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}$$

② حل في IR المعادلات التالية :

1- $(x-4)^3 + 1 = 0$

2- $(2x-3)^4 - 16 = 0$

3- $(x^2+1)^5 = 32$

4- $x\sqrt[3]{x} - 2 = 0$

5- $x^3 + 8 = 0$

6- $\sqrt[3]{x^2+7x} = 2$

③ حل في IR المتراجحة : $x+2 > \sqrt[3]{x^2+8}$

④ احسب :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x} \quad ; \quad \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt[3]{x+6} - 2}{1 - \sqrt[3]{x-x}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[4]{x+1} + 1}{\sqrt[3]{x+1} - 1} \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[4]{x+1}}{\sqrt[6]{x+1} + \sqrt{x+1}}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[4]{x+1}}{x} \quad ; \quad \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt[3]{x-1}}$$

⑤ حل في IR المعادلات :

1- $\sqrt[3]{x^2-1} = 2$

2- $\sqrt[3]{x^2} - 5\sqrt[3]{x} + 6 = 0$

3- $x^{2/5} - 5x^{1/5} + 6 = 0$

4- $2x^{1/3} - 3x^{1/6} + 1 = 0$