Limites, asymptotes.

1 :Nous allons voir les limites d'une fonction de façon intuitive. Il ne sera pas utile ici de rentrer dans des détails théoriques.

a) Chercher la limite d'une fonction f en une grandeur x_0 c'est chercher vers quelle grandeur le nombre f(x) s'approche quand x s'approche de x_0 . (x_0 peut être un nombre fini ou être l'infini positif ou négatif) .

b) Si on appelle l cette limite on notera :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

c) Exemple 1 : $f(x) = x^2 + 1$ alors $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$. En effet quand x va tendre vers $-\infty$ x^2 va tendre vers $+\infty$ et en ajoutant 1 on reste en $+\infty$.

d) Exemple 2 : $f(x) = \frac{1}{x} + 6$ alors $\lim_{x \to 0_{x>0}} f(x) = +\infty$ en effet quand x va tendre vers 0 en restant positif, son inverse va tendre vers $+\infty$ et en ajoutant 6 on reste en $+\infty$.

2 : Asymptotes.

a) Définition : Une droite est une asymptote à une courbe si l'écart entre la courbe et la droite va en diminuant quand x tend vers l'infini (+ ou – ou les deux) ou quand x tend vers une valeur finie où la fonction a une limite infinie . Voyons ces deux cas.

b) Asymptotes obliques : Soit f une fonction de x et d la droite d'équation:

$$y = ax + b.$$

On dit que d est une asymptote à la courbe représentative de f si on a au moins l'une des limites suivantes:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) - (ax + b) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (ax + b) = 0$$

c) Asymptotes verticales : ***Soit f une fonction de x si on a l'une des limites suivantes***

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = +\infty$$

alors la droite d'équation $x = x_0$ est une asymptote verticale pour la courbe représentative de f

d) Exemple 1 : Soit f la fonction définie par $f(x) = e^x - x + 4$. La droite d'équation

$$y = -x + 4$$

est une asymptote oblique, en effet on a

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) - (-x + 4) = 0$$

e) Exemple 2 : Soit f la fonction définie par

$$f(x) = -2x + 4 + \frac{5}{x-3}$$

alors la droite d'équation x = 3 est une asymptote verticale, en effet :

$$\lim_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} f(x) = +\infty$$

et

$$\lim_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} f(x) = -\infty \quad .$$

3 : Exercices .

Pour chaque fonction, déterminer si il y a une ou des asymptotes , préciser sa nature, son équation et pour quelle grandeur de x comme dans l'exemple suivant ; vous justifierez votre réponse. $f(x) = e^{-x} - x + 4$ ***admet une asymptote oblique d'équation*** $y = -x + 4$ ***en*** $+\infty$ ***car :***

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (-x + 4) = 0$$

a)

$$f_1(x) = 3x + 4 - \frac{1}{x+1} .$$

b)

$$f_2(x) = 3 + 4x - \frac{1}{-x+12} .$$

c)

$$f_3(x) = x + 4 - \frac{1}{(x+2)^3} .$$

d)

$$f_4(x) = 5 - \frac{1}{(x+3)^2} .$$

e)

$$f_5(x) = \frac{3x^2 + 4x - 1}{x+2} .$$

On pourra écrire f sous la forme

$$f_5(x) = ax + b + \frac{c}{x+2} .$$

f)

$$f_6(x) = \frac{x^2 + x - 1}{2x+1}$$

On pourra écrire f sous la forme

$$f_6(x) = ax + b + \frac{c}{2x+1} .$$