La dérivation.

1: Définition.

a) f est une fonction donnée. Le nombre dérivé de la fonction f au point d'abscisse x_0 est, par définition, le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_0 , c'est-à-dire au point M de coordonnées (x_0 ; f (x_0)) . On note ce coefficient directeur $f'(x_0)$.

b) f est une fonction donnée. On appelle fonction dérivée de f la fonction qui à chaque valeur de x associe le nombre dérivé $f'(x)$. On note cette fonction f' .

2: Relations fondamentales.

Soient f et g deux fonctions de x et k une constante réelle. Alors :

$$(f+g)' = f' + g' .$$

$$(kf)' = kf' .$$

3: Formules de dérivation usuelles.

f et g sont deux fonctions de la variable x, k et n sont deux constantes réelles. Alors :

$$(x)' = 1 .$$

$$(fg)' = f'g + fg' .$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} .$$

$$(f^n)' = nf'f^{n-1}$$

Un cas particulier : $(x^n)' = nx^{n-1}$.

4: Équation de tangente.

Problème : Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative d'une fonction f en un point M de coordonnées (x_0 ; f (x_0)), c'est-à-dire au point d'abscisse x_0 .

Cette équation peut se mettre sous la forme :

$$y = ax + b .$$

On rappelle que a représente le coefficient directeur de cette droite et b l'ordonnée à l'origine.

Par définition on sait que :

$$a = f'(x_0) .$$

D'autre part les coordonnées du point M vérifient l'équation de cette droite (M est le point de contact de la courbe avec la tangente) donc on a :

$$f(x_0) = x_0 f'(x_0) + b .$$

Donc

$$b = f(x_0) - x_0 f'(x_0) .$$

D'où l'équation de la tangente cherchée:

$$y = x\ f'(x_0) + f(x_0) - x_0 f'(x_0) .$$

Équation qu'on trouve aussi sous la forme :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) .$$

5 : Tableau de variation d'une fonction.

a) Théorème : Le signe de la fonction dérivée de f indique les variations de la fonction f :

si $f > 0$ alors f est croissante.
si $f < 0$ alors f est décroissante.

Remarque 1 : Il est déterminant de connaître les valeurs où la dérivée change de signe. Pour cela on doit résoudre l'équation :

$$f'(x) = 0 .$$

Remarque 2 : On se souvient que si le coefficient directeur d'une droite est nul alors cette droite est parallèle à l'axe des abscisses (on prend habituellement l'axe des abscisses horizontal, une droite qui a un coefficient directeur nul est donc horizontale) .

En conséquence, aux valeurs qui annulent la dérivée vont correspondre des points maximum ou minimum selon les cas, sauf si la dérivée s'annule sans changer de signe, ce qui est le cas pour la fonction « carré ».

b) : Le tableau de variations: On réunit dans un tableau les conclusions de l'étude du signe de la dérivée, on indique les variations de la fonction et ses valeurs remarquables comme dans l'exemple suivant :

x	-5		-1		2		+∞
$f'(x)$	0	+	0	-	0	+	
f	3	$\nearrow$	7	$\searrow$	1	$\nearrow$	+∞

Ce tableau nous apprend que la fonction est définie sur l'intervalle [-5; +∞[. La fonction est croissante puis décroissante puis croissante. Elle atteint un maximum local en -1, il vaut 7. Elle atteint un minimum local en 2 qui vaut 1. La dérivée s'annule trois fois en -5 en -1 et en 2. Cela signifie que la courbe représentative de f admet trois tangentes horizontales.

6 : Exercices.

Exercice 1 : Dériver les expressions suivantes :

$$P(x) = x^5 \;;\; Q(x) = 3x^4 \;;\; R(x) = x^3 - x^2 \;;\; S(x) = 2 + x\,.$$

Exercice 2 : Dériver les expressions suivantes :

$$P(x) = 3x^2 - 5x + 1 \;;\; Q(x) = 3x^4 - 5x - 2 \;;\; R(x) = x^3 - x^2 + 48\,.$$

Exercice 3 : Dériver les expressions suivantes :

$$P(x) = (3x^2 - 5x + 1)^3 \;;\; Q(x) = (3x^4 - 5x - 2)^2 \;;\; R(x) = (x^3 - x^2 + 48)^{-5}\,.$$

Exercice 4 : Dériver les expressions suivantes :

$$P(x) = (3x^2 - 5x + 1)^3 + (3x^4 - 5x - 2)^2 \;;\; Q(x) = (x^3 - x^2 + 48)^{-5} + x^3 - x^2 + 48.$$

Exercice 5 : Dériver les expressions suivantes :

$$f(x) = \frac{1}{3x + 5} \quad , \quad g(x) = 3x^2 + \frac{1}{3x + 5} \quad , \quad h(x) = \frac{1}{x} \quad .$$

Exercice 6 : Dériver les expressions suivantes :

$$f(x) = ax^2 + 3x \quad , \quad g(x) = 5x^2 - 3bx - 6 \quad ,$$

$$h(x) = 5ax^2 - 3bx - 6c$$

où a, b et c sont des constantes.

Exercice 7 : Pour chaque fonction, déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative au point d'abscisse 2:

$$f(x) = x^2 + 3x \quad , \quad g(x) = 5x^2 - 3x - 6 \quad ,$$

$$h(x) = -x^3 - x - 6 \quad .$$

Exercice 8 : Pour chaque fonction, déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative au point d'abscisse 2:

$$f(x) = ax^2 + 3x \quad , \quad g(x) = 5x^2 - 3bx - 6$$

où a et b sont des constantes.