Corrigé des exercices .

Pour chaque fonction, déterminer si il y a une ou des asymptotes , préciser sa nature, son équation et pour quelle grandeur de x comme dans l'exemple suivant; vous justifierez votre réponse. f(x) = e^{-x} – x + 4 admet une asymptote oblique d'équation y = -x + 4 en + ∞ car :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - (-x + 4) = 0$$

$$a)\quad f_1(x) = 3x + 4 - \frac{1}{x+1}$$

On a : $\lim_{x\to+\infty} f(x) - (3x+4) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x+1} = 0$ **et** $\lim_{x\to-\infty} f(x) - (3x+4) = \lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{x+1} = 0$

Donc la droite d'équation y = 3x + 4 est une asymptote oblique.

Et $\lim_{\substack{x\to-1\\ x<-1}} f(x) = +\infty$, $\lim_{\substack{x\to-1\\ x>-1}} f(x) = -\infty$ ***donc la droite d'équation x = -1 est une asymptote verticale.***

$$b)\quad f_2(x) = 3 + 4x - \frac{1}{-x+12} \quad .$$

On a : $\lim_{x\to+\infty} f(x) - (3+4x) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{-x+12} = 0$ **et** $\lim_{x\to-\infty} f(x) - (3+4x) = \lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{-x+12} = 0$

Donc la droite d'équation y = 3 + 4x est une asymptote oblique.

Et $\lim_{\substack{x\to12\\ x<12}} f(x) = -\infty$, $\lim_{\substack{x\to-1\\ x>12}} f(x) = +\infty$ ***donc la droite d'équation x = 12 est une asymptote verticale.***

$$c)\quad f_3(x) = x + 4 - \frac{1}{(x+2)^3} \quad .$$

On a : $\lim_{x\to+\infty} f(x) - (x+4) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{(x+2)^3} = 0$ **et** $\lim_{x\to-\infty} f(x) - (x+4) = \lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{(x+2)^3} = 0$

Donc la droite d'équation y = 3x + 4 est une asymptote oblique.

Et $\lim_{\substack{x\to-2\\ x<-2}} f(x) = +\infty$, $\lim_{\substack{x\to-2\\ x>-2}} f(x) = -\infty$ ***donc la droite d'équation x = -2 est une asymptote verticale.***

$$d)\quad f_4(x) = 5 - \frac{1}{(x+3)^2} \quad .$$

On a : $\lim_{x\to+\infty} f(x) - (5) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{(x+3)^2} = 0$ **et** $\lim_{x\to-\infty} f(x) - (5) = \lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{(x+3)^2} = 0$

Donc la droite d'équation y = 5 est une asymptote oblique (horizontale).

Et $\lim_{x\to-3} f(x) = -\infty$ ***donc la droite d'équation x = -3 est une asymptote verticale.***

REMARQUE : ici il est inutile de faire les deux cas x>-3 et x< -3 car (x + 3)² est toujours positif.

e) $f_5(x) = \dfrac{3x^2 + 4x - 1}{x+2}$ *. On pourra écrire f sous la forme* $f_5(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+2}$ *.*

Après réduction sous le même dénominateur on a : $ax + b + \dfrac{c}{x+2} = \dfrac{ax^2 + (2a+b)x + 2b+c}{x+2}$

Il faut donc que : $3x^2 + 4x - 1 = ax^2 + (2a+b)x + 2b+c$ *d'où les conditions : a = 3 , b = -2 et c = 3*

On a donc $f_5(x) = 3x - 2 + \dfrac{3}{x+2}$ *. maintenant on applique ce qu'on a appliqué précédemment:*

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (3x - 2) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{x+2} = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - (3x - 2) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3}{x+2} = 0$

Donc la droite d'équation y = 3x – 2 est une asymptote oblique.

Et $\lim\limits_{\substack{x\to-2 \\ x<-2}} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to-2 \\ x>-2}} f(x) = +\infty$ *donc la droite d'équation x = -2 est une asymptote verticale.*

f) $f_6(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{2x+1}$ *, On pourra écrire f sous la forme* $f_6(x) = ax + b + \dfrac{c}{2x+1}$ *.*

Après réduction sous le même dénominateur on a : $ax + b + \dfrac{c}{2x+1} = \dfrac{2ax^2 + (a+2b)x + b+c}{2x+1}$

Il faut donc que : $x^2 + x - 1 = 2ax^2 + (a+2b)x + b+c$ *d'où les conditions : a =* $\dfrac{1}{2}$ *, b =* $\dfrac{1}{4}$ *et c =* $\dfrac{-5}{4}$

On a donc $f_5(x) = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4} - \dfrac{5}{4}.\dfrac{1}{2x+1}$ *. maintenant on applique ce qu'on a appliqué précédemment:*

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4}) = \lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{5}{4}.\dfrac{1}{2x+1} = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - (\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4}) = \lim\limits_{x\to-\infty} -\dfrac{5}{4}.\dfrac{1}{2x+1} = 0$

Donc la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4}$ *est une asymptote oblique.*

Et $\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{1}{2} \\ x<\frac{-1}{2}}} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{1}{2} \\ x>\frac{-1}{2}}} f(x) = -\infty$ *donc la droite d'équation* $x = \dfrac{-1}{2}$ *est une asymptote verticale.*