Correction du sujet du 26 janvier, bts session 2004 DE exercice 2.

EXERCICE 2 (10 points)

Exemple de courbe de Bézier définie par points de définition et polynômes de Bernstein.

Dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 2 centimètres, on donne les points suivants par leurs coordonnées :
$A(1, 1)$, $B(3, 2)$ et $C(4, 1)$.

Le but de l'exercice est de déterminer et de tracer une courbe possédant les propriétés suivantes :

- *elle passe par les points A, B et C ;*
- *elle admet le vecteur $\overrightarrow{AB}$ pour vecteur directeur de la tangente à la courbe au point A ;*
- *elle admet le vecteur $\overrightarrow{BC}$ pour vecteur directeur de la tangente à la courbe au point C.*

Pour tout nombre t de l'intervalle [0, 1], soit M le point défini par :

$$\overrightarrow{OM} = (1-t)^2\,\overrightarrow{OA} + 2t(1-t)\,\overrightarrow{OB} + t^2\,\overrightarrow{OC}\ .$$

1° Calculer en fonction de t les coordonnées x et y du point M.

2° On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle [0, 1] par :
$f(t) = -t^2 + 4t + 1$ et $g(t) = -2t^2 + 2t + 1$.
Etudier les variations des fonctions f et g sur [0, 1] et rassembler les résultats dans un tableau unique.

3° On note Γ la courbe, dans le repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, dont un système d'équations paramétriques est :

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad \text{où } t \text{ appartient à l'intervalle } [0, 1].$$

a) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la tangente à la courbe Γ au point A et que le vecteur $\overrightarrow{BC}$ est un vecteur directeur de la tangente à la courbe Γ au point C.

b) Déterminer un vecteur directeur de la tangente à la courbe Γ au point S obtenu pour $t = \frac{1}{2}$.

c) Tracer avec précision les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$, la tangente au point S, puis la courbe Γ.
(On rappelle que l'unité graphique est 2 cm.)

La courbe Γ ainsi obtenue est la courbe de Bézier dont A, B, C sont les points de définition.

Pour tout nombre t de l'intervalle [0, 1], soit M le point défini par :

$$\overrightarrow{OM} = (1-t)^2\ \overrightarrow{OA} + 2t(1-t)\ \overrightarrow{OB} + t^2\ \overrightarrow{OC}\ .$$

1° Calculer en fonction de t les coordonnées x et y du point M.

On obtient les équations suivantes :

$$x(t) = 1 \,.\, (1 - t)^2 + 3 \,.\, 2.t(1 - t) + 4\, t^2$$
$$y(t) = 1 \,.\, (1 - t)^2 + 2 \,.\, 2.t(1 - t) + 1\, t^2$$

On développe soigneusement ….

$x(t) = 1 - 2\,t + t^2 +$

$6t - 6t^2 +$

$4t^2$

$x(t) = 1 + 4t - t^2$

et

$y(t) = 1 - 2\,t + t^2 +$

$4t - 4t^2 +$

t^2

$y(t) = 1 + 2t - 2t^2$

2° On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle [0, 1] par :
$f(t) = -t^2 + 4t + 1$ et $g(t) = -2t^2 + 2t + 1$.
Etudier les variations des fonctions f et g sur [0, 1] et rassembler les résultats dans un tableau unique.

On dérive f et g, on obtient :

$$f'(t) = -2t + 4$$
$$g'(t) = -4t + 2$$

f ' s'annule pour t = 2 qui n'appartient pas à l'intervalle [0 ; 1] , f ' reste toujours positive sur cet intervalle . Et g ' s'annule pour t = $\frac{1}{2}$ et est d'abord positive puis négative sur [0 ; 1].

t	0		$\frac{1}{2}$		1
x'(t)		+		+	
x	1	$\nearrow$	$\frac{11}{4}$	$\nearrow$	4
y	1	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	1
y'(t)		+	0	-	

3° On note Γ la courbe, dans le repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, dont un système d'équations paramétriques est :

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$ où t appartient à l'intervalle [0, 1].

a) Montrer que le vecteur $\vec{AB}$ est un vecteur directeur de la tangente à la courbe Γ au point A et que le vecteur $\vec{BC}$ est un vecteur directeur de la tangente à la courbe Γ au point C.

On a vu que M(0) = A, il suffit de montrer que les vecteurs $\overrightarrow{V(0)}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

Or $\overrightarrow{V(0)} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{V(0)} = 2\ \overrightarrow{AB}$. Ils sont colinéaires.

Et on a vu que M(1) = C, il suffit de montrer que les vecteurs $\overrightarrow{V(1)}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.

Or $\overrightarrow{V(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{V(1)} = 2\ \overrightarrow{BC}$. Ils sont colinéaires.

b) Déterminer un vecteur directeur de la tangente à la courbe Γ au point S obtenu pour $t = \frac{1}{2}$.

$$\overrightarrow{V\left(\frac{1}{2}\right)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) Tracer avec précision les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{BC}$, la tangente au point S, puis la courbe Γ.
(On rappelle que l'unité graphique est 2 cm.)

La courbe Γ ainsi obtenue est la courbe de Bézier dont A, B, C sont les points de définition.