La fonction exponentielle.

1: Définition.

a) On appelle fonction exponentielle la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien , on la note « exp ». Elle est définie sur l'ensemble des nombres réels et prend ses valeurs dans l'ensemble des réels strictement positifs. On montre que la fonction exponentielle est définie par :

$$\exp(x) = e^x \quad \text{où } e \text{ est une constante comprise entre 2 et 3 .}$$

e est une constante de même nature que pi.

e = **2.718281828459045235360287471352662497757247093699959574966967627724076
630353547594571382178525166427427466391932003059921817413596629043572900334295
260595630738132328627943490763233829880753195251019011573834187930702154089149
934884167509244761460668082264800168477411853742345442437107539077744992069
551702761838606261331384583000752044933826560297606737113200709328709127443747
047230696977209310141692836819025515108657463772111252389784425056953696770785
449969967946864454905987931636889230098793127736178215424999229576351482208269
895193668033182528869398496465105820939239829488793320362509443117301238197068
416140397019837679320683282376464804295311802328782509819455815301756717361332
069811250996181881593041690351598888519345807273866738589422879228499892086805
825749279610484198444363463244968487560233624827041978623209002160990235304369
941849146314093431738143640546253152096183690888707016768396424378140592714563
549061303107208510383750510115747...**

- Vous trouverez cette source ici : http://www.jlsigrist.fr/e.html

b) notez que la fonction exponentielle est une fonction strictement positive.

2: Les limites.

On va admettre les limites suivantes:

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

Cette dernière limite signifie que la fonction exp est plus rapide que la fonction identité (la fonction qui à x associe x).

3: Relations algébriques.

a et b sont des nombres réels et n un nombre quelconque, alors:

$$\exp(a+b) = \exp(a) \,.\, \exp(b)$$

$$\exp(a-b) = \frac{\exp a}{\exp b}$$

$$\exp(-b) = \frac{1}{\exp b}$$

$$(\exp a)^n = \exp(na)$$

4: Dérivée de la fonction exponentielle.

Si f est une fonction de x alors la dérivée de exp (f(x)) est :

$$(\exp(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})))' = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})\exp(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))$$

En particulier on a :

$$(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{x}})' = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{x}}$$

5: le tableau de variation.

x	**-∞** **+∞**
Exp (x)	+
Exp	***0*** ↗ **+∞**

6: Exercices.

Exercices 1 : Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de :

exp (2) ; exp (-2) ; exp(3) ; (exp(3))^{2} ; exp (6) .

Exercices 2 : Donner une valeur approchée à l'unité près de :

exp (20) ; exp (50) ; exp (200); exp (300)

Exercices 3 :Donner une valeur approchée l'unité près de :

exp -10 ; exp -25 .

Exercices 4 : Écrire sous forme simplifiée les expressions suivantes:

$$exp(2) . exp(3); \ exp(6) . exp(-2) ; exp(8) . exp(-2) .exp(-4) .$$

Exercices 5 :Écrire sous forme simplifiée les expressions suivantes:

$P(x) = exp(\ln (6x – 5))$; $Q(x) = exp(\ln (3x^2 – 5x + 1))$; $R(x) = exp (\ln (x^2 – 1) – \ln (x – 1))$.

(On admettra que tous les arguments de ln sont strictement positifs)

Exercices 6 :

a) Dériver les fonctions suivantes:

$$f(x) = x e^x \ ; \ g(x) = x e^{(2x +3)} \ ; h(x) = (x^2 -3x + 1) e^{(1-x)} .$$

b) Étudier le signe des dérivée précédentes.