

La fonction logarithme népérien.

1: Définition.

a) On appelle fonction logarithme népérien, et on la note « \ln », l'unique fonction définie sur l'ensemble des nombres strictement positifs qui à 1 associe 0 et qui a pour fonction dérivée la fonction inverse. Ce qui s'écrit:

$$\ln(1) = 0.$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \text{ où } x > 0$$

b) Remarque 1: Si on note i la fonction inverse, c'est à dire $i(x) = \frac{1}{x}$, alors la fonction \ln est une primitive de la fonction i pour les valeurs de x strictement positives

c) Remarque 2: On a immédiatement le tableau de variations de la fonction \ln :

x	0	1	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	+	+	
\ln	$-\infty$	0	$+\infty$

Rappel: La double barre sous le 0 signifie que la valeur 0 est une valeur interdite.

2: Les limites.

On va admettre les limites suivantes:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

Cette dernière limite signifie que la fonction \ln est plus lente que la fonction identité (la fonction qui à x associe x).

3: Relations algébriques.

a et b sont des nombres strictement positifs et n un nombre quelconque, alors:

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b.$$

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

$$\text{En particulier } \ln \frac{1}{b} = -\ln b$$

$$\ln a^n = n \ln a$$

4: Dérivée de la fonction \ln .

Si f est une fonction de x alors la dérivée de $\ln(f(x))$ est :

$$(\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

5: Exercices.

Exercices 1 : Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de :

$$\ln 2 ; \ln 0,5 ; \ln 3 ; \ln 3^2 ; (\ln 3)^2 .$$

Exercices 2 : Donner une valeur approchée à l'unité près de :

$$\ln 10\ 000 ; \ln 150\ 000 ; \ln 6\ 000\ 000\ 000 .$$

Exercices 3 : Donner une valeur approchée l'unité près de :

$$\ln 0,001 ; \ln 0,00005 ; \ln 0,000\ 000\ 004 .$$

Exercices 4 : Écrire sous la forme « $a \ln b$ » les expressions suivantes:

$$\ln 2 + \ln 3 ; \ln 6 - \ln 2 ; \ln 8 - 3 \ln 2 ; \ln 49 + 7 \ln 2 .$$

Exercices 5 : Écrire sous la forme « $a \ln (B(x))$ » les expressions suivantes:

$$P(x) = \ln (6x - 5)^3 - \ln (3x^2 - 5x + 1)^3 ; Q(x) = \ln (x^2 - 1) - \ln (x - 1) ;$$

(On admettra que tous les arguments de \ln sont strictement positifs)

Exercices 6 : Résoudre les équations suivantes:

$$\ln 2x - \ln 3 = 0 ; \ln x^2 - \ln 3x + \ln 2 = 0 ; \ln 6x - \ln x^2 = 0 .$$

Exercices 7 : Résoudre les équations suivantes:

$$\ln (x + 1) - \ln (x - 1) = \ln x ; \ln (2x + 1) - \ln (x + 5) = \ln (x + 1) - \ln (x) .$$

(On fera bien attention à la validité des solutions trouvées)