Correction du sujet du 02 février, bts session 2005 DE exercice 2.

EXERCICE 2 (13 points)

Exemple de courbe de Bézier définie par points de définition et polynômes de Bernstein.

Dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 2 centimètres, on donne les points suivants par leurs coordonnées :

$$A(-1,0)\,,\ B(0,1)\,,\ C(1,1)\ \text{ et }\ D(1,0).$$

Pour tout nombre réel t de l'intervalle [0, 1], soit M le point défini par :

$$\overrightarrow{OM}=(1-t)^3\,\overrightarrow{OA}+3t(1-t)^2\,\overrightarrow{OB}+3t^2(1-t)\,\overrightarrow{OC}+t^3\,\overrightarrow{OD}\,.$$

1° Calculer en fonction de t les coordonnées x et y du point M.

2° On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle [0, 1] par :

$$f(t)=-t^3+3t-1\quad\text{et}\quad g(t)=-3t^2+3t.$$

Étudier les variations des fonctions f et g sur [0, 1] et rassembler les résultats dans un tableau unique.

3° On note Γ la courbe, dans le repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, dont un système d'équations paramétriques est :

$\begin{cases} x=f(t)\\ y=g(t)\end{cases}$ où t appartient à l'intervalle [0, 1].

a) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la tangente à la courbe Γ au point A et que le vecteur $\overrightarrow{DC}$ est un vecteur directeur de la tangente à la courbe Γ au point D.

b) Déterminer un vecteur directeur de la tangente à la courbe Γ au point S obtenu pour $t=\frac{1}{2}$.

c) Placer les points A, B, C et D. Tracer avec précision les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$, la tangente au point S, puis la courbe Γ.
(On rappelle que l'unité graphique est 2 cm.)

4° a) Tracer la courbe Γ' image de la courbe Γ par la symétrie centrale de centre $A(-1, 0)$.

b) On note Γ_1 la réunion des courbes Γ et Γ'. Tracer la courbe Γ_2 image de la courbe Γ_1 par la symétrie orthogonale d'axe, l'axe des abscisses.

1° Calculer en fonction de t les coordonnées x et y du point M.

On obtient les équations suivantes :

$$x(t) = -1 \times (1 - t)^3 + 0 \times 3\,t(1 - t)^3 + 1 \times 3\,t^2(1-t) + 1 \times t^3$$
$$y(t) = 0 \times (1 - t)^3 + 1 \times 3\,t(1 - t)^2 + 1 \times 3\,t^2(1-t) + 0 \times t^3$$

On développe soigneusement ….

$$x(t) = -1 + 3\,t - 3t^2 + t^3$$
$$+ 3t^2 - 3t^3$$
$$+ t^3$$
$$x(t) = -1 + 3t - t^3$$

et

$$y(t) = 3t - 6t^2 + 3\,t^3$$
$$+ 3t^2 - 3t^3$$
$$y(t) = 3t - 3t^2$$

2° On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle [0, 1] par :

$$f(t) = -t^3 + 3t - 1 \quad \text{et} \quad g(t) = -3t^2 + 3t.$$

Étudier les variations des fonctions f et g sur [0, 1] et rassembler les résultats dans un tableau unique.

On dérive f et g, on obtient :

$$f'(t) = -3t^2 + 3$$
$$g'(t) = -6t + 3$$

f ' reste positive sur l'intervalle [0 ; 1] . Et g ' s'annule pour t = $\frac{1}{2}$ et est d'abord positive puis négative sur [0 ; 1].

t	0		$\frac{1}{2}$		1
x'(t)		+		+	
x	-1	$\nearrow$	$\frac{3}{8}$	$\nearrow$	1
y	0	$\nearrow$	$\frac{3}{4}$	$\searrow$	0
y'(t)		+	0	-	

3° On note Γ la courbe, dans le repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$, dont un système d'équations paramétriques est :

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$ où t appartient à l'intervalle [0, 1].

a) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la tangente à la courbe Γ au point A et que le vecteur $\overrightarrow{DC}$ est un vecteur directeur de la tangente à la courbe Γ au point D.

b) Déterminer un vecteur directeur de la tangente à la courbe Γ au point S obtenu pour $t = \frac{1}{2}$.

c) Placer les points A, B, C et D. Tracer avec précision les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$, la tangente au point S, puis la courbe Γ.
(On rappelle que l'unité graphique est 2 cm.)

a) On a vu que M(0) = A, il suffit de montrer que les vecteurs $\overrightarrow{V(0)}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

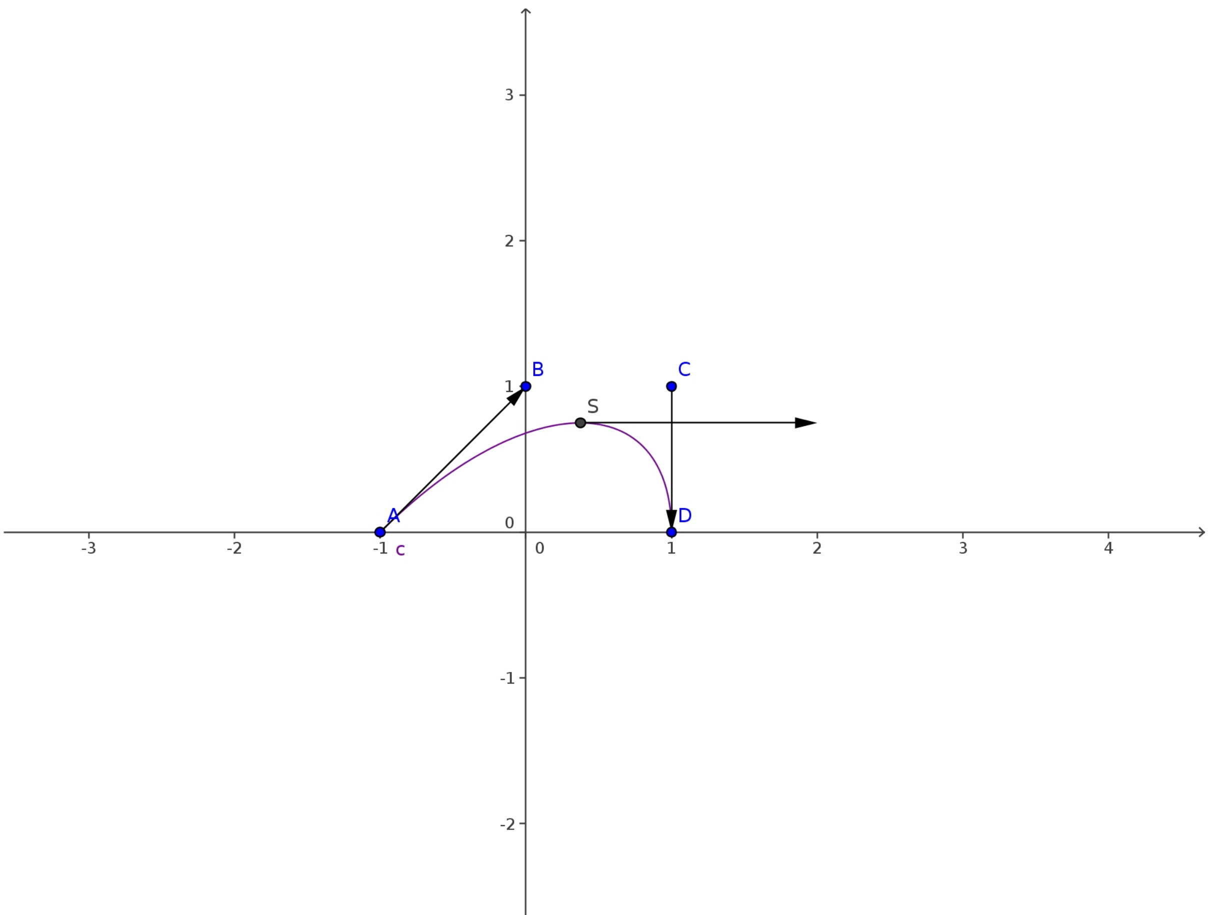
Or $\overrightarrow{V(0)}=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{V(0)}$ = 3 $\overrightarrow{AB}$. Ils sont colinéaires.

Et on a vu que M(1) = D, il suffit de montrer que les vecteurs $\overrightarrow{V(1)}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont colinéaires.

Or $\overrightarrow{V(1)}=\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{V(1)}$ = -3 $\overrightarrow{DC}$. Ils sont colinéaires.

b) $\overrightarrow{V(\frac{1}{2})}=\begin{pmatrix}\frac{11}{4}\\0\end{pmatrix}$ **ce vecteur a une direction horizontale.**

c)



4° a) Tracer la courbe Γ' image de la courbe Γ par la symétrie centrale de centre $A(-1, 0)$.

b) On note Γ_1 la réunion des courbes Γ et Γ'. Tracer la courbe Γ_2 image de la courbe Γ_1 par la symétrie orthogonale d'axe, l'axe des abscisses.