DM A3 Suites, premiers éléments

Problème 1

1. Etude d'une suite récurrente.

   (a) Utiliser la définition de la suite U.

   (b) Caractérisation des suites arithmtiques par la différence constante de termes consécutifs.

   (c) Soit par récurrence, soit par reconnaissance d'une suite récurrente linéaire double dont les solutions de l'équation caractéristique sont 1 et x.

2. Etude de la probabilité de voir l'expérience se terminer

   (a) Formule des probabilités totales avec $(A; \overline{A})$ système complet.

   (b) i. Distinguer $p = q$ et $p \neq q$. la suite définie par $u_k = P(E_k)$ vérifie les conditions de la partie 1.

   ii. Distinguer $p = q$ et $p > q$ et $p < q$. Limites de suites géométriques.

   iii. Passage aux exponentielles. Lorsque p tend vers $\dfrac{1}{2}$ alors x tend vers 1.

   (c) Les triplets (A, a, p) et (B, b, q) jouent des rôles symétriques. Attention x devient $\dfrac{1}{x}$.

   (d) Distinguer $p = q$ et $p \neq q$. L'expérience se termine si l'urne A ou l'urne B est vide.

Problème 2

Partie 1

(a) Minorer $\dfrac{1}{t}$ sur $[k; k+1]$.

(b) Changement d'indice puis sommer les inégalités précédentes. La primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est connue.

Partie 2

(a) i. Rien à ajouter.

ii. Evaluer le signe de $u_{n+1} - u_n$.

(b) i. Aucun souci.

ii. Sommer les égalités précédentes entre 0 et $n - 1$.

iii. Aucun souci. Minoration par une suite divergente vers $+\infty$.

(c) i. Utiliser (b).iii, pour majorer $\dfrac{1}{u_k^2}$ puis sommer.

ii. Utiliser la majoration de v_n obtenue à la partie 1.

iii. Encadrer $\dfrac{u_n^2}{2n}$ par 2 suites convergentes vers 1 et appliquer le théorème d'encadrement.