

## Conditionnement - Indépendance

1. Une personne se trouve devant une porte fermée à clef. Elle dispose d'un trousseau de  $n$  clés parmi lesquelles une seule ouvre la porte.
  - (a) Elle essaie les clés au hasard l'une après l'autre. Quelle est la probabilité qu'elle ouvre la porte au  $k$ -ème essai ?
  - (b) Même question avec une personne qui ne se souvient plus des clés qu'elle vient d'essayer.
  
2. On considère trois lots d'articles de même type, le premier compte  $n_1$  articles défectueux et  $m_1$  bons articles ; le deuxième,  $n_2$  articles défectueux et  $m_2$  bons articles et le troisième,  $n_3$  articles défectueux et  $m_3$  bons articles.  
On choisit au hasard l'un des lots pour en tirer au hasard deux articles, le premier est défectueux.  
Quelle est la probabilité que le second article soit défectueux lui aussi ?
  
3. Un fumeur impénitent décide d'essayer de ne plus fumer. On admet que s'il ne fume pas un jour donné, alors la probabilité qu'il ne fume pas le lendemain vaut  $0,3$ . Par contre, s'il succombe un jour donné, alors la probabilité qu'il ne fume pas le lendemain vaut  $0,9$ .  
Posons  $F_n$  l'événement "la personne fume le  $n^{\text{ème}}$  jour" et  $p_n = P(\overline{F_n})$  pour tout  $n \geq 1$ .
  - (a) Déterminer pour tout  $n \geq 2$ , une relation de récurrence entre  $p_n$  et  $p_{n-1}$ .
  - (b) Calculer pour tout  $n \geq 1$ ,  $p_n$  en fonction de  $n$  et de  $p_1$ .
  - (c) "En fin de compte, il a plus de chances de s'arrêter que de continuer." Vrai ou Faux ?
  
4. On dispose de  $n$  urnes numérotées de 1 à  $n$ . L'urne  $i$  contient  $i$  boules numérotées de 1 à  $i$ . On choisit une urne au hasard et on y prend une boule. Calculer la probabilité d'obtenir une boule portant le numéro  $k$ , où  $1 \leq k \leq n$ .
  
5. On lance une pièce de monnaie jusqu'à obtenir pile. Quelle est la probabilité d'obtenir pile au bout d'un nombre pair de lancers ?
  
6. Soit  $n \geq 5$ . Deux amis se rendent indépendamment l'un de l'autre sur le même lieu de vacances. Leur séjour est de 3 jours (c'est à dire du matin du jour  $j$  d'arrivée au soir du jour  $j + 2$ ).  
Les jours d'arrivée possibles pour chacun des 2 amis sont numérotées de 1 à  $n - 2$  (le dernier jour de vacances est donc le jour  $n$ ). Tous les jours d'arrivée sont équiprobables.
  - (a) Calculer la probabilité que les 2 amis arrivent le même jour.
  - (b) Calculer la probabilité que les 2 amis arrivent avec un jour d'écart.
  - (c) Calculer la probabilité qu'ils se rencontrent.
  
7.  $A$  et  $B$  2 événements d'un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  avec  $P(B) \neq 0$  et  $P(B) \neq 1$ .  
Montrer que  $A$  et  $B$  sont indépendants pour  $P \Leftrightarrow P_B(A) = P_{\overline{B}}(A)$
  
8.  $A$  et  $B$  2 événements d'un espace probabilisé.
  - (a) Montrer que si ces 2 événements sont incompatibles et indépendants alors l'un des deux est impossible presque sûrement.
  - (b) Etudier la réciproque.
  - (c) Déterminer les événements incompatibles avec eux mêmes.
  - (d) Déterminer les événements indépendants d'eux mêmes.
  
9. Un joueur est en présence de 2 urnes A et B. Dans l'urne A, il y a 3 boules blanches et 5 boules rouges. Dans l'urne B, il y a 7 boules blanches et 5 boules rouges. Il dispose d'autre part de 2 dés non pipés qu'il lance simultanément une fois. Si le total obtenu est inférieur ou égal à 7, il choisit de tirer 4 boules avec remise dans l'urne A sinon il les tire dans l'urne B. *On ne donnera aucun résultat simplifié ou numérique.*
  - (a) Quelle est la probabilité qu'il choisisse l'urne A ?
  - (b) Quelle est la probabilité qu'il tire 2 blanches et 2 rouges ?
  - (c) Quelle est la probabilité qu'il n'obtienne que des boules rouges ?
  - (d) Le joueur n'obtient que des boules rouges. Quelle est la probabilité qu'il ait tiré dans l'urne A ?

10. Trois personnes A, B et C jouent à pile ou face avec une pièce équilibrée de la façon suivante :
- La première partie oppose A et B.
  - Le vainqueur d'une partie est opposé ensuite à celui qui n'a pas joué.
  - Le vainqueur du tournoi est celui qui gagne 2 parties consécutives.

Exemple :

P1 - A gagne contre B    P2 - C gagne contre A    P3 - B gagne contre C    P4 - A gagne contre B

P5 - A gagne contre C : A est le vainqueur du tournoi!

- (a) Après quelles parties le joueur A peut-il être déclaré vainqueur du tournoi (on envisagera 2 cas en fonction de l'issue de la première partie) ?
  - (b) Calculer les probabilités correspondantes et les "réunir" pour calculer la probabilité que A soit déclaré vainqueur du tournoi.
  - (c) En déduire astucieusement le calcul de la probabilité que B soit déclaré vainqueur du tournoi.
  - (d) Après quelles parties le joueur C peut-il être déclaré vainqueur du tournoi ?
  - (e) Calculer les probabilités correspondantes et les "réunir" pour calculer la probabilité que C soit déclaré vainqueur du tournoi.
  - (f) Montrer que "la partie s'achève" est un événement certain presque sûrement.
11. une urne contient initialement  $a$  boules blanches et  $b$  boules noires.  
On effectue une série de tirages de la façon suivante : on choisit une boule au hasard dans l'urne, si cette boule est blanche, on la remet, si elle est noire, on la remplace par une blanche. Puis on procède au tirage suivant.
- (a) On note  $N_j$  l'événement : "On obtient une boule noire au  $j$ -ème tirage" et  $A_n$  : "On obtient pour la première fois une boule blanche au  $n$ -ème tirage".
    - i. Exprimez  $A_n$  en fonction des  $N_j$ .
    - ii. En déduire  $P(A_n)$ .
  - (b) On note  $B_l$  : "Il reste  $l$  boules noires dans l'urne lorsque l'on obtient la première boule blanche".
    - i. Calculer  $P(B_0)$ .
    - ii. On pose  $N = a + b$ . Montrer que pour  $l \geq 1$  :

$$P(B_l) = \frac{b!}{N^b} \left[ \frac{N^l}{l!} - \frac{N^{l-1}}{(l-1)!} \right]$$

- iii. Que conclure sur l'événement  $\bigcup_{l=0}^b B_l$ .