

Variables aléatoires

- 1) Une urne contient 2 boules blanches et 4 boules noires. On tire les boules une à une et sans remise jusqu'à ce qu'il ne reste dans l'urne que des boules de la même couleur. Soit X la variable aléatoire associée au nombre de tirages nécessaires.
Déterminer la loi de X .
- 2) On lance simultanément 2 dés honnêtes. On note X le plus grand des numéros.
Déterminer la loi de X .
- 3) Soit X une variable aléatoire qui prend ses valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$.
Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a $P(X = k) = \ln(a^k)$ où a est un réel strictement positif.
 - a) Déterminer a pour que X soit une variable aléatoire.
 - b) Calculer $E(X)$.
- 4) Un sac contient 20 jetons : 10 blancs, 5 rouges et 5 verts. Un joueur tire au hasard un jeton dans le sac : s'il est rouge, il gagne 5 euros ; s'il est blanc, il perd 3 euros ; s'il est vert, il procède à un deuxième tirage sans remettre le premier jeton. Si, pour ce deuxième jeton, il est rouge, il gagne 4 euros ; s'il est blanc, il perd 1 euro ; s'il est vert, la partie est nulle. Soit X la variable aléatoire associée au gain (algébrique) du joueur.
 - a) Déterminer la loi de X .
 - b) Calculer $E(X)$.
- 5) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$. Montrer que

$$E(X) = \sum_{i=1}^n P(X \geq i)$$

- 6) Une urne contient $2n$ jetons indiscernables au toucher numérotés de 1 à $2n$. Soit $k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$. On tire au hasard un jeton dans l'urne. Soit X la variable aléatoire associée au numéro obtenu. Si ce numéro est supérieur ou égal à k alors on note le numéro, sinon on remet le jeton dans l'urne et on retire un jeton dont on note alors le numéro. Soit Y la variable aléatoire associée au numéro noté.
 - a) Déterminer la loi de X .
 - b) Déterminer la loi de Y .
 - c) Pour quelle valeur de k l'espérance de Y est-elle maximale ?
- 7) Une entreprise recrute un cadre. n candidats se présentent. Chacun d'eux passe un test avec une probabilité de réussite p ($0 < p < 1$) identique pour chacun. Le premier qui réussit ce test est engagé. On note X la variable aléatoire associée au numéro du candidat engagé ou X prend la valeur $n+1$ si aucun des candidats ne réussit le test. On pose $q = 1 - p$.
 - a) Déterminer la loi de X .
 - b) Montrer que pour tout $x \neq 1$, $\sum_{k=1}^n kx^{k-1} = \frac{-(n+1)x^n(1-x) + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2}$
 - c) Calculer $E(X)$ en fonction de q .
 - d) Pour quelles valeurs de p , l'entreprise a-t-elle plus d'une chance sur 2 d'engager un candidat ?
- 8) Une urne contient n boules noires et n boules blanches. On tire ces boules une à une et sans remise jusqu'à ce que l'urne soit vide. Soit X le rang d'apparition de la première boule blanche.
 - a) Déterminer la loi de X .
 - b) En utilisant la formule donnant $k \binom{n}{k}$ et la formule de Pascal généralisée, calculer $E(2n+1-X)$.
 - c) En déduire $E(X)$.
- 9) Calculer la variance de X pour les exercices 3 et 4.
- 10) Soit n un entier non nul. On lance n fois une pièce de monnaie équilibrée. A l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev, trouver une condition sur n pour que le rapport du nombre de faces obtenus (X) sur le nombre de lancers soit strictement compris entre 0,4 et 0,6 avec une probabilité supérieure ou égale à 0,9. On calculera $E(X)$ et on admettra que $V(X) = \frac{n}{4}$.