

Chapitre P3 - Conditionnement - Indépendance

Table des matières

1	Probabilités conditionnelles	1
1.1	Définition	1
1.2	Formule des probabilités composées	1
1.3	Formule des probabilités totales	1
1.4	Formule de Bayes	2
2	Indépendance	2
2.1	Définition	2
2.2	Indépendance d'une famille	3
2.3	Tribus indépendantes	3

1 Probabilités conditionnelles

1.1 Définition

Théorème et définition

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé et soit $B \in \mathcal{A}$ tel que $P(B) \neq 0$.

On définit un nouvel espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P_B)$ par $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ pour tout $A \in \mathcal{A}$.

P_B est appelée **probabilité conditionnelle** relative à B

$P_B(A)$ est la probabilité de A sachant B , parfois notée $P(A|B)$

1.2 Formule des probabilités composées

Théorème

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_i)_{i \in [1, n]}$ une famille d'événements de \mathcal{A} telle que $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$

alors $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) P_{A_1}(A_2) P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots P_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$

1.3 Formule des probabilités totales

Théorème

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé.

Soit $I \subset \mathbb{N}^*$ et $(A_i)_{i \in I}$ un système complet d'événements de Ω

alors pour tout $B \in \mathcal{A}$, $P(B) = \sum_{i \in I} P(B \cap A_i)$

Si de plus pour tout $i \in I$, $P(A_i) \neq 0$ alors : $P(B) = \sum_{i \in I} P(A_i) P_{A_i}(B)$

Corollaire

En particulier pour tout $(A, B) \in \mathcal{A}^2$:

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$$

Si de plus $P(A) \in]0; 1[$, $P(B) = P(A) P_A(B) + P(\bar{A}) P_{\bar{A}}(B)$

Remarque : $P(A) \in]0; 1[\iff \{P(A) \neq 0 \text{ et } P(\bar{A}) \neq 0\} \iff (A; \bar{A})$ s.c.e. de probabilités non nulles

1.4 Formule de Bayes

Théorème

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé et soit $A \in \mathcal{A}$ tel que $P(A) \in]0; 1[$

pour tout $B \in \mathcal{A}$ tel que $P(B) \neq 0$, $P_B(A) = \frac{P(A) P_A(B)}{P(B)} = \frac{P(A) P_A(B)}{P(A) P_A(B) + P(\bar{A}) P_{\bar{A}}(B)}$

2 Indépendance

2.1 Définition

Définition

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé et soit $(A, B) \in \mathcal{A}^2$,

On dit que A et B sont **indépendants** si $P(A \cap B) = P(A) P(B)$

à ne pas confondre

L'indépendance ne peut se juger qu'en rapport à la probabilité

A et B sont indépendants ssi $P(A \cap B) = P(A) P(B)$

L'incompatibilité est elle une notion ensembliste, qui ne dépend pas de la probabilité

A et B sont incompatibles ssi $A \cap B = \emptyset$

Si A et B sont incompatibles alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Proposition

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé et soit $(A, B) \in \mathcal{A}^2$ tel que $P(A) \neq 0$,

A et B sont indépendants si $P(B) = P_A(B)$

Propriété

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé et soit $(A, B) \in \mathcal{A}^2$

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i. A et B sont indépendants
- ii. A et \bar{B} sont indépendants
- iii. \bar{A} et B sont indépendants
- iv. \bar{A} et \bar{B} sont indépendants

2.2 Indépendance d'une famille

Définition

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé et soit $I \subset \mathbb{N}^*$

$(A_i)_{i \in I}$ est une **famille d'événements indépendants 2 à 2** si
pour tout $(i, j) \in I^2$, $i \neq j \implies P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$

Définition

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé et soit $I \subset \mathbb{N}^*$

$(A_i)_{i \in I}$ est une **famille d'événements mutuellement indépendants** si

pour toute sous partie finie $J \subset I$, $P\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) = \prod_{i \in J} P(A_i)$

2.3 Tribus indépendantes

Définition

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé et \mathcal{T} et \mathcal{S} deux sous tribus de \mathcal{A}

\mathcal{T} et \mathcal{S} sont indépendantes si pour tout $T \in \mathcal{T}$ et pour tout $S \in \mathcal{S}$

T et S sont indépendants

Théorème

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé

Si deux familles $(A_i)_{i \in I}$ et $(B_j)_{j \in J}$ sont telles que pour tout $(i, j) \in I \times J$, A_i et B_j sont indépendants

alors les tribus engendrées sont indépendantes