Chapitre P4 - Variables aléatoires réelles discrètes

Table des matières

1 Variables aléatoires **1**
1.1 Définitions . . . 1
1.2 Loi d'une v.a.r.d. . . . 2
1.3 Fonction de répartition . . . 3
1.4 Lien entre loi et fonction de répartition . . . 3
1.5 Fonction d'une variable aléatoire . . . 3

2 Moments **4**
2.1 Espérance . . . 4
2.1.1 Cas fini . . . 4
2.1.2 Cas infini . . . 4
2.2 Théorème de transfert . . . 4
2.2.1 Cas fini . . . 4
2.2.2 Cas infini . . . 4
2.2.3 Propriétés de l'espérance . . . 4
2.3 Moments d'une variable aléatoire . . . 5
2.4 Variance . . . 5
2.4.1 Définition . . . 5
2.4.2 Propriétés . . . 5
2.4.3 Inégalités probabilistes . . . 5

1 Variables aléatoires

1.1 Définitions

On appellle ***variable aléatoire***, dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, une application :

$$X \quad : \quad \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto & X(\omega) \end{array}$$

telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad \{\omega \in \Omega \quad \text{tel que} \quad X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$

Autrement dit, l'image réciproque de l'intervalle $]-\infty; x]$ est un élément de la tribu, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$X(\Omega) = \{f(\omega) \,|\omega \in \Omega\}$

Une variable aléatoire réelle est dite ***discrète*** lorsque $X(\Omega)$ peut-être indexé par une partie de $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$

En particulier, elle est ***finie*** lorsque $X(\Omega)$ est un ensemble fini.

Propriété :

Pour tout I intervalle de $\mathbb{R}$, $X^{-1}(I) \in \mathcal{A}$

Notation :

l'événement $X^{-1}(\{x\})$ est noté $[X = x]$

l'événement $X^{-1}(]-\infty; x])$ est noté $[X \leq x]$

l'événement $X^{-1}(]x; +\infty; [)$ est noté $[X > x]$

l'événement $X^{-1}([a : b])$ est noté $[a \leq X \leq b]$

s.c.e. lié à une v.a.r.d.

Soit X une v.a.r.d., alors $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements.

On note $\mathcal{A}_X$, la tribu engendrée par ce s.c.e., c'est la tribu associée à X.

Exemple 1 On lance 2 dés équilibrés de couleurs différentes.

1. On considère X la fonction qui à un lancer associe la somme
2. On considère Y la fonction qui à un lancer associe 2 si les deux dés prennent les valeurs 5 ou 6, 1 si l'un des deux dés seulement prend la valeur 5 ou 6 et -1 sinon.

Exemple 2 On lance une pièce équilibrée une infinité de fois.
On considère Z la fonction qui a chaque issue associe le rang d'apparition du premier pile, 0 si pile n'apparait jamais.

1.2 Loi d'une v.a.r.d.

Soit X une v.a.r.d., on appelle ***loi de X*** , la donnée de $X(\Omega)$ et de la suite (p_k) définie par

$$p_k = P(X = x_k) \text{ avec } x_k \text{ parcourant } X(\Omega)$$

Exemple 3 Une urne contient 1 boule rouge et deux blanches. On effectue n tirages avec remise dans cette urne. X est la v.a.r.d. associée au nombre de boules rouges tirées. Donner la loi de X.

Propriétés :

Soit X une v.a.r. **finie**	Soit X une v.a.r. **infinie**
On note $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$	On note $X(\Omega) = (x_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$
alors $\forall k \in [\![1, n]\!], \quad p_k \in [0; 1]$	alors $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad p_k \in [0; 1]$
et $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$	et $\sum_{k=1}^{+\infty} p_k = 1$
Réciproquement, soit $(p_k)_{k \in [\![1,n]\!]} \in \mathbb{R}^n$	**Réciproquement**, soit $(p_k)_{k \in \mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$
Si, pour tout $k \in [\![1, n]\!], \quad p_k \geq 0$ et	Si, pour tout $k \in \mathbb{N}^*, \quad p_k \geq 0$ et
$\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$	$\sum_{k=1}^{+\infty} p_k = 1$
Alors (p_k) est la loi d'une v.a.r. finie	Alors (p_k) est la loi d'une v.a.r. discrète

Exemple 4 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on suppose que $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$ et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $P(X = i) = \alpha i$.
Trouver α pour que l'on définisse ainsi une loi.

Exemple 5 $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $P(X = i) = \dfrac{1}{i(i+1)}$.
Justifier que X est une v.a.r.d.

1.3 Fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire, on appelle ***fonction de répartition de la variable X***,

la fonction F_X définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $F_X(x) = P(X \leq x)$

Propriétés :

Si F_X est la fonction de répartition d'une v.a.r.d. X, alors

F_X est croissante sur $\mathbb{R}$
F_X est continue à droite sur $\mathbb{R}$
$\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$
$\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

1.4 Lien entre loi et fonction de répartition

$$F_X(x) = \sum_{x_k \in X(\Omega), x_k \leq x} P(X = x_k)$$

$$P(X = x_k) = F_X(x_k) - F_X(x_{k-1})$$

Exemple 6 Une urne contient p boules numérotées de 1 à p. On tire n boule avec remise.
On note X le plus grand des numéros tirés. Trouver la loi de X.

1.5 Fonction d'une variable aléatoire

Soit X une v.a.r.d. et g une fonction réelle telle que $X(\Omega) \subset D_g$.

alors la fonction $Y = g(X)$ définie sur Ω par $Y(\omega) = g(X(\omega))$ est une variable aléatoire.

Loi de Y

Pour tout $y_i \in Y(\Omega)$, $P(Y = y_i) = \displaystyle\sum_{x_k \in X(\Omega), g(x_k) = y_i} P(X = x_k)$.

Exemple 7 On considère la variable Y définie dans l'**exemple 1**. On pose $T = |Y|$.
Trouver la loi de T.

2 Moments

2.1 Espérance

2.1.1 Cas fini

$$X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$$

On appelle ***espérance de X***, le nombre réel $E(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k P(X = x_k)$.

Dans le cas où $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$, alors $E(X) = \sum_{k=1}^{n} kP(x = k)$

Exemple 8 Reprendre les exemples 1, 3 et 4

2.1.2 Cas infini

Si la série de terme géneral $x_k P(X = x_k)$ est **absolument convergente**,

alors ***l'espérance de X*** existe et vaut $E(X) = \sum_{x_k \in X(\Omega)} x_k P(X = x_k)$.

Exemple 9 Reprendre les exemples 2 et 5

2.2 Théorème de transfert

Soit X une v.a.r.d. et g une fonction réelle telle que $X(\Omega) \subset D_g$, on pose $Y = g(X)$.

2.2.1 Cas fini

$$E(Y) = E(g(X)) = \sum_{x_k \in X(\Omega)} g(x_k) P(X = x_k)$$

Exemple 10 Reprendre l'exemple 7

2.2.2 Cas infini

Y admet une espérance ssi la série de terme général $g(x_k) P(X = x_k)$ est **absolument convergente**.

On a alors $E(Y) = E(g(X)) = \sum_{x_k \in X(\Omega)} g(x_k) P(X = x_k)$

2.2.3 Propriétés de l'espérance

Soient a et b deux réels et X une v.a.r.d. admettant une espérance

Si $X(\Omega) \subset [a; b]$ alors $E(X) \in [a; b]$

$E(aX + b) = aE(X) + b \quad \rightarrow$ linéarité de l'espérance

2.3 Moments d'une variable aléatoire

On appelle ***moment d'ordre r de la v.a.r.d. X***, sous réserve d'existence (cvg. abs. de la série), le nombre réel noté $m_r(X) = E(X^r) = \sum_{x_k \in X(\Omega)} {x_k}^r P(X = x_k)$.

On appelle ***moment centré d'ordre r de la v.a.r.d. X***, sous réserve d'existence (cvg. abs. de la série), le nombre réel noté $\mu_r(X) = E((X - E(X))^r) = \sum_{x_k \in X(\Omega)} (x_k - E(X))^r P(X = x_k)$.

remarque :
- Si X admet un moment d'ordre r, alors X admet un moment d'odre p, pour tout $p \in [\![1, r]\!]$.
- $m_1 = E(X)$
- $\mu_1(X) = 0$

2.4 Variance

2.4.1 Définition

Soit X une v.a.r.d. admettant un moment d'ordre 2 alors $V(X) = \mu_2(X)$ est appelée la ***variance de X*** et $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ est appelé *l'écart type de* X

2.4.2 Propriétés

Soient a et b deux réels et X une v.a.r.d. admettant un moment d'ordre 2 alors

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 \quad \rightarrow \text{Formule de Huygens.}$$

$$V(X) = E(X(X-1)) + E(X) - E(X)^2 \quad \rightarrow \text{deuxième formule de Huygens.}$$

2.4.3 Inégalités probabilistes

Inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire à valeurs positive et admettant une espérance.

$$\text{Pour tout } \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \quad P(X \geq \lambda E(X)) \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Inégalité de Bienaymé-Thebychev

Soit X une variable aléatoire à admettant une variance non nulle.

$$\text{Pour tout } \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad P(|X - E(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{V(X)}{\epsilon^2}.$$