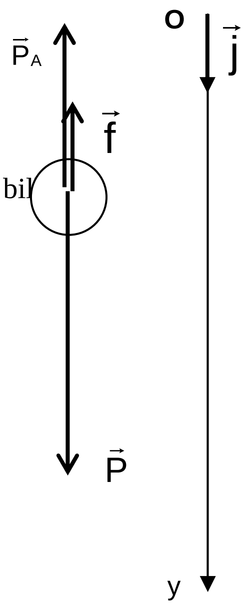
Corrigé Exercice N°3

1. Mesure de la viscosité η de la glycérine



1.1. Voir schéma.

1.2. Poids de la bille : $P = m_{bille}.g$. or $\rho = \dfrac{m_{bille}}{V}$ donc $\boxed{P = \rho.V.g}$

1.3. Poussée d'Archimède : $P_A = m_{gly}.g$. où m_{gly} est la masse de glycérol déplacé par la bil

donc $\boxed{P_A = \rho_0.V.g.}$

1.4.1. La vitesse limite est atteinte avant le passage au niveau de R_1. Entre les deux repères R_1 et R_2 , le vecteur vitesse $\vec{V}$ de la bille est constant (norme $v = v_{lim}$, direction selon l'axe Oy et sens celui de $\vec{j}$). La bille a un mouvement rectiligne et uniforme.

1.4.2. La première loi de Newton (principe d'inertie) indique que les forces se compensent. Alors $\Sigma\vec{F}_{ext} = \vec{0}$ $\boxed{\vec{P} + \vec{P}_A + \vec{f} = \vec{0}}$.

1.5.1. On a : $f = 6\pi.\eta.r.v$

Analyse dimensionnelle :$[\eta] = \dfrac{[f]}{[r].[v]} = \dfrac{[m].[a]}{[r].[v]} = \dfrac{M.L.T^{-2}}{L.L.T^{-1}} = M.L^{-1}.T^{-1}$

Donc η s'exprime en $kg.m^{-1}.s^{-1}$.

1.5.2. $\vec{P} + \vec{P}_A + \vec{f} = \vec{0} \Leftrightarrow \rho.V.g\,\vec{j} - \rho_0.V.g\,\vec{j} - 6\pi.\eta.r.v_{lim}\,\vec{j} = \vec{0}$

en projection sur l'axe (y'y) on a : $\Leftrightarrow \rho.V.g - \rho_0.V.g - 6\pi.\eta.r.v_{lim} = 0$ $\Leftrightarrow V.g.(\rho - \rho_0) = 6\pi.\eta.r.v_{lim}$

$$\Leftrightarrow \eta = \frac{V.g}{6\pi.r.v_{lim}}.(\rho - \rho_0)$$

Or : $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ donc en reportant : $\eta = \dfrac{4}{3}\pi r^3.\dfrac{g}{6\pi.r.v_{lim}}.(\rho - \rho_0)$ finalement : $\boxed{\eta = \dfrac{2r^2.g.(\rho - \rho_0)}{9v_{lim}}}$

1.6.1. $v_{lim} = \dfrac{h}{\Delta t'}$ $\qquad v_{lim} = \dfrac{40,0 \times 10^{-2}}{1,66} = 0,241\ m.s^{-1}$.

1.6.2. $\eta = \dfrac{2r^2.g.(\rho - \rho_0)}{9v_{lim}}$ $\qquad \eta = \dfrac{2 \times (5,00 \times 10^{-3})^2 \times 9,81 \times (7,80 \times 10^3 - 1,26 \times 10^3)}{9 \times 0,241} = 1,48\ kg.m^{-1}.s^{-1}$

1.6.3. $\eta_{thé} = 1,49$ SI. $\qquad$ écart relatif **:** $100 \times \dfrac{|\eta_{thé} - \eta|}{\eta_{thé}} = 100 \times \dfrac{|1,49 - 1,48|}{1,49} = $ **0,7 %.**

2. Étude théorique du mouvement de la bille

2.1. On applique la deuxième loi de Newton à la bille, de masse m, dans le référentiel du laboratoire, supposé galiléen : $\Sigma\overrightarrow{F_{ext}} = m.\vec{a} \Leftrightarrow$ $\vec{P} + \vec{P}_A + \vec{f} = m.\vec{a}$

$$\Leftrightarrow \quad \rho.V.g.\,\vec{j} - \rho_0.V.g.\,\vec{j} - 6\pi.\eta.r.v\,\vec{j} = \rho.V.\frac{d\vec{v}}{dt}$$

en projection sur (y'y) : $\rho.V.g - \rho_0.V.g - 6\pi.\eta.r.v = \rho V.\dfrac{dv}{dt}$

en divisant par (ρ.V), il vient : $\dfrac{dv}{dt} = g - \dfrac{\rho_0}{\rho}.g - \dfrac{6\pi.\eta.r}{\rho.V}.v = g.\left(1 - \dfrac{\rho_0}{\rho}\right) - \dfrac{6\pi\eta r}{\rho V}.v$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{6\pi\eta r}{\rho V}.v = g.\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)$$

en identifiant avec l'équation: $\dfrac{dv}{dt} + A.v = B$ on a : $\boxed{A = \dfrac{6\pi.\eta.r}{\rho.V}}$ et $\boxed{B = g.\left(1 - \dfrac{\rho_0}{\rho}\right)}$

$$A = \frac{6\pi \times 1,49 \times 5,00 \times 10^{-3}}{7,80 \times 10^{3} \times \frac{4}{3}.\pi.\left(5,00 \times 10^{-3}\right)^{3}} = 34,4 \text{ s}^{-1} \qquad B = 9,81 \times \left(1 - \frac{1,26 \times 10^{3}}{7,80 \times 10^{3}}\right) = 8,23 \text{ m.s}^{-2}$$

2.2. Vitesse limite atteinte par la bille : $v = v_{lim} = cte$ alors $\frac{dv}{dt} = 0$ donc $A.v_{lim} = B$ soit $v_{lim} = \frac{B}{A}$

$$v_{lim} = \frac{8,23}{34,4} = 0,239 \text{ m.s}^{-1}$$ or en 1.6.1. on a mesuré $v_{lim,exp} = 0,241$ m.s^{-1}

La valeur v_{lim} est en accord la valeur expérimentale $v_{lim,exp}$: écart relatif de 0,8 %.

2.3. Le rapport 1/A s'exprime en s (car A s'exprime en s^{-1}). Donc 1/A est homogène à une durée : 1/A correspond à la durée caractéristique τ de chute de la bille dans la glycérine.

Considérons l'équation différentielle à la date t = 0 s : $\left(\frac{dv}{dt}\right)_{t=0} + A.v(t=0) = B$

La bille est lâchée sans vitesse initiale v(t=0) = 0 donc $\left(\frac{dv}{dt}\right)_{t=0} = B$

Donc B correspond à l'accélération de la bille à la date t = 0 s.

2.4.1. Le pas Δt est : $\Delta t = t_{i+1} - t_i = 0,025 - 0,020 = 0,005$ s = 5 ms.

2.4.2. méthode d'Euler : $v_6 = v_5 + a_5.\Delta t$

$v_6 = 0,146 + 3,20 \times 5\times10^{-3} = 0,162$ m.s^{-1}

$a_7 = (B - A.v_7)$

$a_7 = 8,23 - 34,4 \times 0,175 = 2,21$ m.s^{-2}

2.5.1. & 2.5.2.