Chute verticale d'un solide

Exercice N°1

Une éprouvette contenant un liquide visqueux sert de support à l'étude de la chute d'une bille d'acier. Le schéma ci-dessous, qui donne une idée du montage, n'est qu'indicatif. En particulier, il ne respecte pas d'échelle et ne peut pas servir de support pour des mesures.

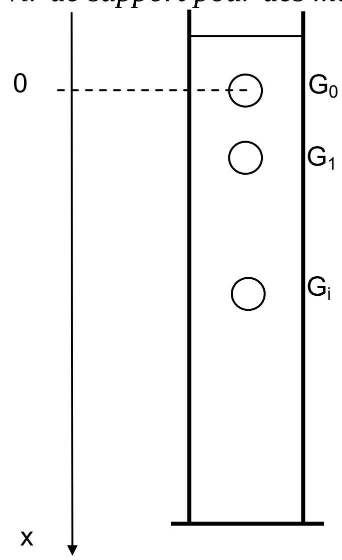


FIGURE 1

La bille, qui constitue le système étudié, est lâchée sans vitesse initiale à l'instant $t = 0$ (voir figure 1). Au même instant, une acquisition vidéo assurée par une webcam couplée à un ordinateur est déclenchée de manière à enregistrer 25 images par seconde.

La position instantanée x du centre G de la bille est repérée par l'axe vertical orienté vers le bas $\overrightarrow{Ox}$, de vecteur unitaire $\vec{i}$. A $t = 0$, G est en G_0.

Le vecteur-vitesse de G est noté $\vec{v} = v.\vec{i}$.

La vidéo est ensuite analysée à l'aide d'un logiciel approprié qui permet de repérer aux dates t_i les positions successives x_i de G lors de son mouvement descendant et de calculer approximativement la vitesse moyenne v_i entre les dates t_{i-1} et t_{i+1}.

La détermination des vitesses v_i aux instants t_i donne l'***ENREGISTREMENT 1.***

1. Exploitation de l'enregistrement

1.a. Expliquer comment le logiciel permet de déterminer les vitesses v_i à partir des positions x_i aux instants t_i.

1.b. Mettre en évidence l'existence d'une vitesse limite V_L dont on donnera la valeur.

2. Equation du mouvement

On considère comme système la bille plongée dans le liquide et en mouvement par rapport à celui-ci.

2.a. Faire le bilan des forces qui s'exercent sur le système. Les représenter sur un schéma.

2.b. On note m et V la masse et le volume de la bille, ρ et ρ' les masses volumiques respectives de l'acier qui constitue la bille et du liquide dans laquelle celle-ci est plongée.

$\vec{g} = g.\vec{i}$ est l'accélération de la pesanteur.

On suppose que la force (« résistance ») exercée par le fluide sur la bille en mouvement est de la forme $\vec{F} = -k.\vec{v}$, k étant une constante positive.

Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la fonction v(t). Montrer qu'elle est de la forme :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{-k.v}{m} + \alpha.g$$

2.c. Vérifier que la fonction $v(t) = \alpha.g.\frac{m}{k}.\left[1 - \exp\left(-\frac{k}{m}.t\right)\right]$ est solution de l'équation précédente et vérifie la condition initiale : à $t = 0$, $v = 0$.

On prend dorénavant les valeurs suivantes, données dans le système international S.I. :

$m = 5{,}00.10^{-3}$ kg ; $g = 9{,}81$ m.s $^{-2}$; $k = 7{,}60.10^{-2}$ kg.s^{-1} ; $\alpha = 0{,}906$.

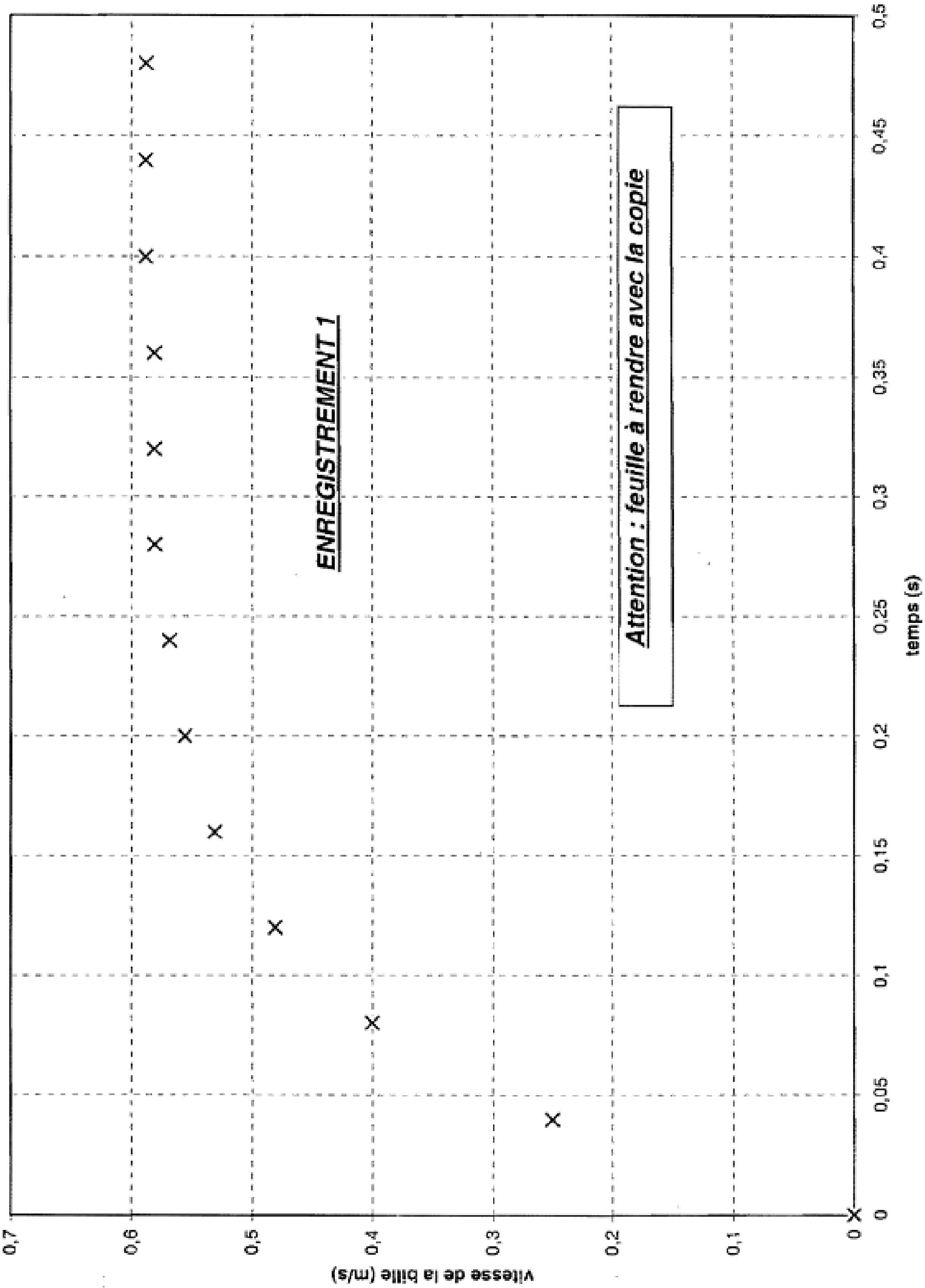
2.d. Dans l'équation différentielle ou dans l'expression de la solution, mettre en évidence l'existence d'une vitesse limite. Calculer sa valeur et la comparer à celle trouvée en 1.b.

Utiliser l'analyse dimensionnelle pour déterminer l'unité de $\dfrac{m}{k}$.

Calculer numériquement ce rapport.
Quelle interprétation peut-on donner de cette grandeur ?

3. <u>Détermination du temps caractéristique sur l'enregistrement</u>

Par une méthode de votre choix et que vous expliciterez, déterminez sur l'enregistrement la valeur du temps τ caractéristique du phénomène. Conclusion.



Exercice N°2

Galileo Galilei, dit Galilée (1564-1642) était un mathématicien, physicien et astronome italien. Célèbre pour ses travaux sur la chute des corps et pour ses observations célestes, il travailla aussi sur la mesure de la température. C 'est à partir de l'une de ses idées qu'a été confectionné le thermomètre dit de Galilée.

Cet exercice vise à comprendre le fonctionnement de ce thermomètre.

Cet objet décoratif est constitué d'une colonne remplie d'un liquide incolore et de plusieurs boules en verre soufflé, lestées par une petite masse métallique.

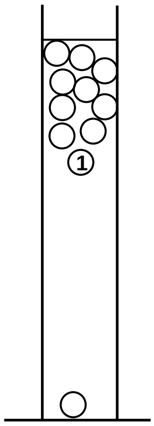
Le liquide contenu dans la colonne a une masse volumique ρ_ℓ (T) *qui décroît fortement lorsque la température augmente. Les boules ont chacune le même volume mais possèdent des masses différentes. Un petit médaillon indiquant une température est accroché sous chacune d'elles. Chaque boule possède une masse ajustée de manière précise. Pour un modèle commercial courant, on trouve onze boules indiquant des températures comprises entre 17 °C et 27 °C.*

Dans cet appareil, on peut observer que certaines boules sont situées en bas de la colonne et que d'autres flottent en haut. La température de la colonne est indiquée par la boule qui se trouve en équilibre dans le liquide c'est-à-dire par la plus basse des boules situées en haut de la colonne.

1. Principe de fonctionnement

On décide de construire un thermomètre. On utilise une éprouvette remplie d'une huile de masse volumique $\rho_\ell(T)$ *dans laquelle on place des boules de même volume* V_b *mais de masses volumiques différentes. On constate que certaines boules flottent et d'autres coulent.*

On s'intéresse dans cette partie à la boule 1 de volume V_b *et de masse volumique* ρ. *On peut supposer que la masse volumique et le volume de cette boule sont quasiment indépendants de la température contrairement à ceux du liquide dans lequel elle est immergée. La boule 1 est immobile, en équilibre dans l'huile.*



1.1. Faire un inventaire des forces s'exerçant sur la boule 1. Les représenter sur un schéma sans souci d'échelle.

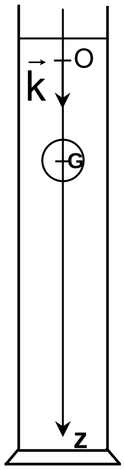
1.2. Exprimer ces différentes forces en fonction de ρ, ρ_ℓ (T), V_b et de g, l'intensité du champ de pesanteur.

1.3. Établir l'expression littérale de la masse volumique ρ que doit avoir la boule 1 pour rester immobile.

1.4. Expliquer pourquoi, hormis la boule 1, les boules restent les unes en haut de la colonne, les autres en bas.

1.5. Lorsque la température du liquide s'élève, la boule 1 se met en mouvement. Justifier dans quel sens.

1. Étude du mouvement d'une boule.



On utilise le même liquide que précédemment et on y place une seule boule de masse m de centre d'inertie G. Le liquide contenu dans l'éprouvette est à 18 °C, on constate qu'à cette température, la boule flotte. On chauffe alors légèrement le liquide jusqu'à 20 °C, on plonge à nouveau la boule à l'intérieur et on constate qu'elle descend le long de l'éprouvette. On prend pour origine des dates (t = 0 s) l'instant où on a plongé la boule dans le liquide. On modélise la valeur f de la force de frottement fluide du liquide sur la boule par f= k.v, avec v, la vitesse du centre d'inertie de la boule et k le coefficient de frottement. On définit un axe Oz dirigé vers le bas, le point O coïncide avec le centre d'inertie de la boule à l'instant de date t = 0 s.

2.1. Représenter, à l'aide d'un schéma, sans souci d'échelle, mais de façon cohérente, les forces s'exerçant sur la boule en mouvement.

2.2. *En utilisant la deuxième loi de Newton,* montrer que la vitesse *v(t)* du centre d'inertie de la boule obéit à une équation différentielle de la forme : $\frac{dv}{dt} = A - B.v$. Donner les expressions littérales de A et de B en fonction de *m, g, k,* ρ_ℓ (T) et V_b.

2.3. Établir l'expression littérale de la vitesse limite atteinte par la boule.
On donne $A = 9{,}5 \times 10^{-3}\ m.s^{-2}$ *et* $B = 7{,}3 \times 10^{-1}\ s^{-1}$. Calculer sa valeur.

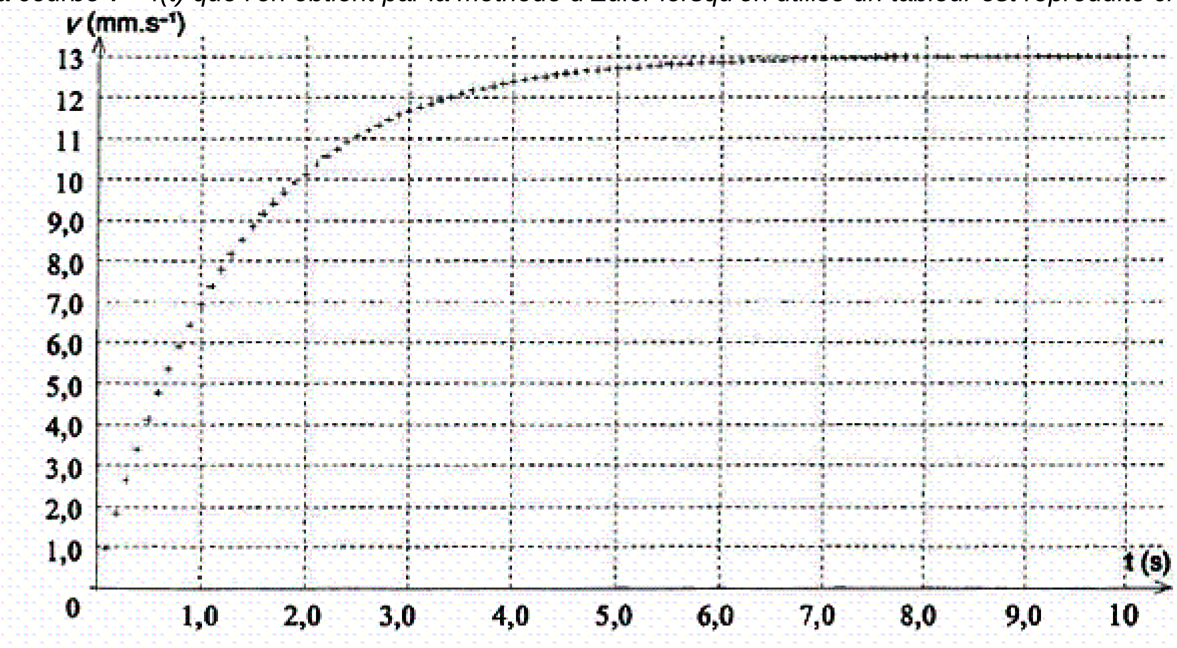
2.4. *On se propose de résoudre l'équation différentielle* $\frac{dv}{dt} = A - B.v$ *et de construire la courbe v = f(t) en utilisant la méthode d'Euler. Cette méthode itérative permet de calculer, pas à pas, de façon approchée, les valeurs de la vitesse instantanée de la boule à différentes dates.*
On utilise la relation suivante :

$$v(t_n) = v(t_{n-1}) + \Delta v(t_{n-1}) \text{ avec } \Delta v(t_{n-1}) = a(t_{n-1}) \cdot \Delta t$$
$$t_n = t_{n-1} + \Delta t \text{ où } \Delta t \text{ est le pas d'itération du calcul.}$$

En utilisant l'équation différentielle et la relation d'Euler, recopier sur la copie le tableau suivant et le compléter :

Dates t en s	*Vitesse* $v(t_n)$ *en* $m.s^{-1}$	$\Delta v(t_n)$ *en* $m.s^{-1}$
$t_0 = 0$	0	
$t_1 = 0{,}10$		$8{,}8 \times 10^{-4}$
$t_2 = 0{,}20$		

La courbe v = f(t) que l'on obtient par la méthode d'Euler lorsqu'on utilise un tableur est reproduite ci-dessous :



2.5. Indiquer les différents régimes observés sur la courbe $v = f(t)$.
2.6. Déterminer graphiquement, en prenant soin d'expliquer votre méthode, le temps caractéristique τ.
2.7. Justifier le choix de la valeur du pas utilisé $\Delta t = 0{,}10$ s.

Données :

Rayon de la boule : $R = 1{,}50 \times 10^{-2}$ *m*

Volume de la boule $V_b = \frac{4}{3}.\pi.R^3$

Masse de la boule : $m = 12{,}0 \times 10^{-3}$ *kg*

Masse volumique du liquide à 20°C: $\rho_\ell(20°C) = 848$ $kg.m^{-3}$

Coefficient de frottement: $k = 8{,}8 \times 10^{-3}$ $kg.s^{-1}$

Intensité de la pesanteur: $g = 9{,}80$ $m.s^{-2}$

Exercice N°3

La glycérine connue aussi sous le nom du glycérol se présente sous la forme d'un liquide transparent, visqueux, incolore et non toxique.

On se propose dans cet exercice de déterminer dans une première partie, la valeur expérimentale de la viscosité de ce liquide. La deuxième partie, théorique, utilise une méthode numérique pour simuler le mouvement de chute d'une bille dans ce liquide.

1. Mesure de la viscosité η de la glycérine

La viscosité désigne la capacité d'un fluide à s'écouler. Elle dépend fortement de la température.

Pour mesurer la viscosité de la glycérine, on utilise un dispositif appelé viscosimètre de HOEPLER (ou viscosimètre à chute de bille).

Il se compose d'un long tube de verre vertical, rempli du liquide étudié, dans lequel on laisse tomber une bille sphérique en acier de diamètre calibré.

La durée de chute Δt' correspondant à une distance de chute h connue est mesurée à l'aide de deux capteurs reliés à un chronomètre électronique. Les deux capteurs sont repérés par les positions R_1 et R_2 comme le montre le schéma de la figure 1 ci-contre.

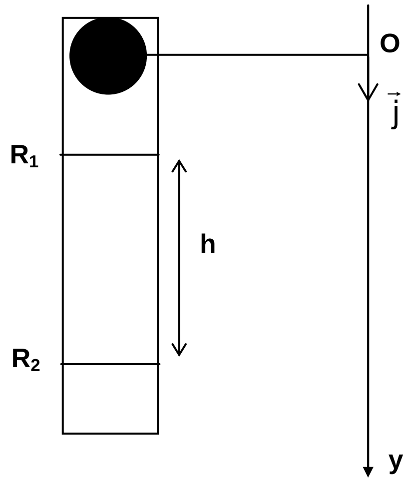


Figure 1

Données :

Rayon de la bille : r = 5,00 mm

Masse volumique de la bille : $\rho = 7{,}80.10^3$ kg.m^{-3}

Masse volumique de la glycérine : $\rho_0 = 1.26.10^3$ kg.m^{-3}

Intensité de la pesanteur : g = 9,81 m.s^{-2}

Volume d'une sphère : $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

On étudie le mouvement de la bille dans le référentiel terrestre (considéré comme galiléen) muni d'un repère $(O, \vec{j})$. O est l'origine du repère. Son vecteur unitaire $\vec{j}$ est vertical et orienté vers le bas. La bille totalement immergée dans le liquide, est abandonnée du point O sans vitesse initiale.

1.1. Représenter sur un schéma, sans souci d'échelle, les forces appliquées à la bille en mouvement dans le liquide : son poids $\vec{P}$, la poussée d'Archimède $\vec{P}_A$ et la force de frottement fluide $\vec{f}$.

1.2. Exprimer littéralement la valeur *P* du poids de la bille en fonction de ρ, V et g.

1.3. Exprimer la valeur P_A de la poussée d'Archimède en fonction de ρ_o, V et g.

1.4. Lors de sa chute, la bille atteint rapidement sa vitesse limite v_{lim} avant son passage au niveau du repère R_1.

1.4.1. Quel est le mouvement de la bille entre les deux repères R_1 et R_2? Justifiez votre réponse.

1.4.2. Quelle est alors la relation vectorielle liant les forces appliquées à la bille ? Justifiez votre réponse.

1.5. Dans le cas du fluide étudié, la force de frottement est proportionnelle à la vitesse de chute de la bille :

$$\vec{f} = -6\pi\eta r\vec{v} \quad \text{où } \eta \text{ est la viscosité de la glycérine.}$$

1.5.1. À la suite d'une analyse dimensionnelle, donner l'unité de η.

1.5.2. En projetant la relation vectorielle établie dans la question 1.4.2 suivant le repère $(O, \vec{j})$, montrer que la viscosité η du fluide étudié s'exprime par la relation :

$$\eta = \frac{2r^2g(\rho - \rho_0)}{9v_{lim}}$$

1.6. On mesure la durée de chute de la bille en mouvement rectiligne uniforme entre les repères R_1 et R_2 distants d'une hauteur h = 40,0 cm. On obtient Δt' = 1,66 s à la température θ = 20°C.

1.6.1. Calculer la vitesse limite v_{lim} de la bille.

1.6.2. En déduire la valeur expérimentale de la viscosité η de la glycérine à la température d'étude.

1.6.3. La valeur théorique de la viscosité de la glycérine à cette température est $\eta_{thé}$= 1,49 SI.

En effectuant un calcul d'écart relatif, comparer la valeur trouvée expérimentalement de la viscosité η de la glycérine à sa valeur théorique.

2. Étude théorique du mouvement de la bille

À l'instant choisi comme origine des dates, la bille est abandonnée sans vitesse initiale au point O.

2.1. En utilisant la deuxième loi de Newton, montrer que l'équation différentielle liant la vitesse de la bille et sa dérivée par rapport au temps est de la forme :

$$\frac{dv}{dt} + Av = B \text{ avec } A = 34{,}4\ s^{-1} \text{ et } B = 8{,}23\ m.s^{-2}.$$

Identifiez les expressions des termes A et B dans cette équation.

2.2. En déduire la valeur de la vitesse limite atteinte par la bille. Est-elle en accord avec la valeur trouvée expérimentalement dans la question **1.6.1.**?

2.3. À quelle grandeur physique le rapport 1/A correspond-il ? Même question pour le paramètre B.

2.4. La courbe d'évolution de la vitesse au cours du temps est représentée sur la FIGURE DE L'ANNEXE. Elle a été obtenue par résolution de l'équation différentielle précédente par la méthode numérique itérative d'Euler. Cette méthode permet de calculer, pas à pas, de façon approchée, les valeurs de la vitesse instantanée v_i et de l'accélération a_i à l'instant t_i. Pour ce calcul, on a utilisé les relations suivantes : $v(t_i) = v(t_{i-1}) + a(t_{i-1}).\Delta t$ où Δt est le pas d'itération du calcul.

$$a(t_i) = B - A.v(t_i)$$

Un extrait de la feuille de calcul est donné par le tableau 1 ci-dessous :

t_i(s)	v($m.s^{-1}$)	a ($m.s^{-2}$)
0,020	0127	3,86
0,025	0,146	3,20
0,030		2,65
0,035	0,175	
0,040	0,186	1,82

Tableau 1

2.4.1. Quel est le pas Δt utilisé pour les calculs ?

2.4.2. En utilisant la méthode d'Euler, calculer la vitesse v_6 à la date t = 0,030 s et l'accélération a_7 à la date t = 0,035 s.

2.5. La courbe v = f(t) représentée sur la FIGURE DE L'ANNEXE, permet de mettre en évidence deux régimes distincts pour le mouvement de la bille. Ces deux régimes sont séparés par le trait en pointillé vertical dessiné sur le graphe.

2.5.1. Compléter les cases de la FIGURE DE L'ANNEXE en identifiant ces deux régimes.

2.5.2. Déterminer graphiquement le temps caractéristique τ en prenant soin d'expliquer votre méthode.

ANNNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE

Questions 2.5.1 et 2.5.2