Chapitre 3 : Mouvement parabolique dans un champ de pesanteur uniforme.

c.f. TP N° 10 de Physique

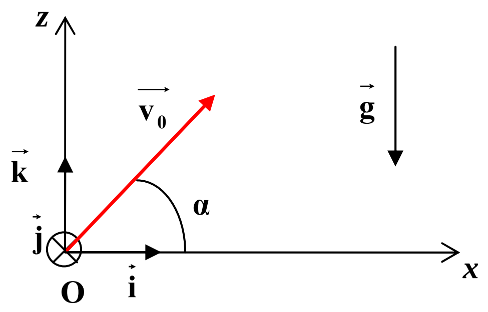
Objectifs :

- *Appliquer la deuxième loi de Newton à un projectile dans un champ de pesanteur uniforme ;*
- *Montrer que le mouvement est plan ;*
- *Établir l'équation de la trajectoire à partir des équations horaires paramétriques ;*
- *Savoir exploiter un document expérimental reproduisant la trajectoire d'un projectile : tracer des vecteurs vitesse et accélération, déterminer les caractéristiques du vecteur accélération, trouver les conditions initiales.*

I. Quelles sont les équations horaires du mouvement ?

I.1. Bilan des forces extérieures au système

On étudie le lancer d'un projectile, de masse ***m*** et de centre d'inertie G (ex : balle de golf, boule de pétanque…), avec une vitesse initiale $\overrightarrow{\mathbf{v}_0}$ dans un champ de pesanteur uniforme (lancer au voisinage de la Terre)



Système d'étude : {projectile}
Référentiel d'étude : terrestre supposé galiléen
Bilan des forces extérieures :

- poids $\vec{\mathbf{P}}$ du projectile
- poussée d'Archimède $\overrightarrow{\Pi_A}$
- les forces de frottements de l'air (frottement fluide) : $\vec{\mathbf{f}}$ proportionnelle à la vitesse du projectile

On supposera qu'on peut négliger $\overrightarrow{\Pi_A}$ (la masse volumique de l'air est très faible devant celle du projectile) et $\vec{\mathbf{f}}$ (la vitesse initiale du projectile et la distance parcourue suffisamment faibles) devant $\vec{\mathbf{P}}$.

On pourra donc considérer que le **mouvement du projectile est un mouvement de chute libre dans un champ de pesanteur uniforme**.

L'axe vertical Oz est **ascendant** !

À l'instant initial t = 0 s on a :

- $\mathbf{x(0) = y(0) = z(0) = 0}$
- le vecteur vitesse est $\overrightarrow{\mathbf{v}_0}$
- **l'angle de tir** est noté $\boldsymbol{\alpha}$ (par rapport à l'axe horizontal O*x*)

I.2. Coordonnées du vecteur accélération

D'après la deuxième loi de Newton on a : $\vec{\mathbf{P}} = \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}_G(\mathbf{t})}$

Soit : $\mathbf{m} \cdot \vec{\mathbf{g}} = \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}_G(\mathbf{t})}$

d'où $\vec{\mathbf{g}} = \overrightarrow{\mathbf{a}_G(\mathbf{t})}$

⇒ Le **vecteur accélération** aura la **même direction**, le **même sens** et **la même valeur que le vecteur champ de pesanteur !**

En projetant cette relation selon les trois axes du repère on obtient les coordonnées du vecteur accélération :

$$\overrightarrow{\mathbf{a}_G(\mathbf{t})} \left| \begin{array}{l} \mathbf{a}_x = 0 \\ \mathbf{a}_y = 0 \\ \mathbf{a}_z = -\mathbf{g} \end{array} \right.$$

I.3. Coordonnées du vecteur vitesse

Les coordonnées du vecteur vitesse $\vec{v}$ du centre d'inertie du projectile en intégrant les coordonnées du vecteur accélération on obtient alors :

$$\overrightarrow{v(t)} \left| \begin{array}{l} v_x = C_1 \\ v_y = C_2 \\ v_z = -g \cdot t + C_3 \end{array} \right.$$

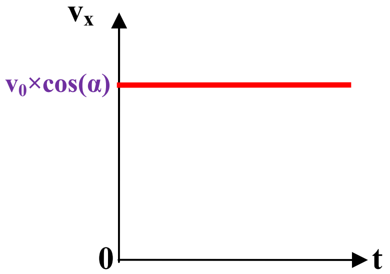
D'après les conditions initiales :

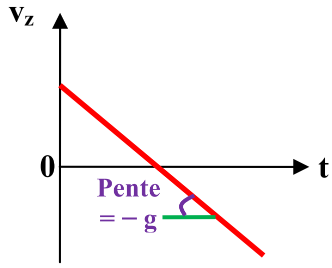
$$\overrightarrow{v(0)} \left| \begin{array}{l} v_x(0) = v_{0x} = \mathbf{v_0} \cdot \mathbf{cos}(\boldsymbol{\alpha}) = C_1 \\ v_y(0) = \mathbf{0} = C_2 \\ v_z(0) = v_{0z} = \mathbf{v_0} \cdot \mathbf{sin}(\boldsymbol{\alpha}) = -g \times 0 + C_3 \end{array} \right.$$

L'expression du vecteur vitesse est donc :

$$\boxed{\overrightarrow{v(t)} \left| \begin{array}{l} \mathbf{v_x(t) = v_0 \cdot cos(\alpha)} \\ \mathbf{v_y(t) = 0} \\ \mathbf{v_z(t) = -g \times t + v_0 \cdot sin(\alpha)} \end{array} \right.}$$

- la **composante horizontale du vecteur vitesse est constante** et vaut $v_x = v_{0x} = \mathbf{v_0 \cdot cos(\alpha)}$
- la **composante verticale du vecteur vitesse est une fonction affine décroissante du temps**.





I.4. Équations horaires du mouvement

Les coordonnées du vecteur position $\overrightarrow{OG}(t)$ du centre d'inertie du projectile en intégrant les coordonnées du vecteur vitesse on obtient alors les équations horaires du mouvement :

$$\overrightarrow{OG} \left| \begin{array}{l} \mathbf{x(t)} = v_{0x} \times t + C_4 = \left(v_0 \cdot \cos(\alpha)\right) \times t + C_4 \\ \mathbf{y(t)} = C_5 \\ \mathbf{z(t)} = -\frac{1}{2} \cdot g \times t^2 + \left(v_0 \cdot \sin(\alpha)\right) \times t + C_6 \end{array} \right.$$

D'après les conditions initiales :

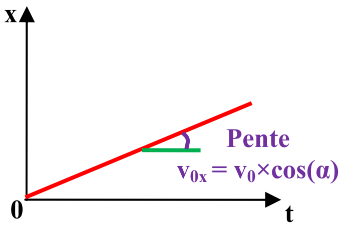
$$\overrightarrow{OG}(0) \left| \begin{array}{l} \mathbf{x(0)} = 0 = \left(v_0 \cdot \cos(\alpha)\right) \times 0 + C_4 \\ \mathbf{y(0)} = 0 = C_5 \\ \mathbf{z(t)} = 0 = -\frac{1}{2} \times g \times 0^2 + \left(v_0 \cdot \sin(\alpha)\right) \times 0 + C_6 \end{array} \right.$$

L'expression du vecteur position (= équations horaires du mouvement) est donc :

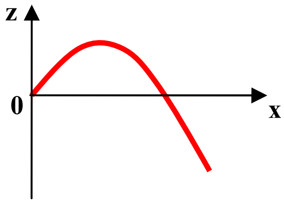
$$\boxed{\overrightarrow{OG(t)} \left| \begin{array}{l} \mathbf{x(t) = (v_0 \cdot cos(\alpha)) \times t} \\ \mathbf{y(t) = 0} \\ \mathbf{z(t) = -\frac{1}{2} \cdot g \times t^2 + (v_0 \cdot sin(\alpha)) \times t} \end{array} \right.}$$

Les coordonnées du vecteur position (= équations horaires du mouvement) nous montrent que le **mouvement du projectile est plan**, la **trajectoire est contenue dans le plan** *x*Oz.

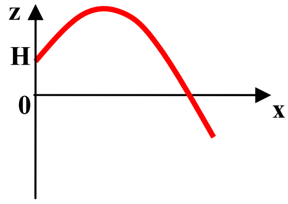
La fonction **x(t)** est une **fonction linéaire** de **coefficient directeur** : $\mathbf{v_{0x} = v_0 \cdot \cos(\alpha)}$
La fonction **z(t)** est une **parabole**.



Si z(0) = 0



Si z(0) = H



II. Quelle est la trajectoire du centre d'inertie du projectile ?

II.1. Equation de la trajectoire

À l'aide des équations horaires on peut déterminer l'équation de la trajectoire **z = f (x)**.

D'après l'équation horaire $\mathbf{x(t) = v_0 \cdot \cos(\alpha) \times t}$ donc $\mathbf{t = \dfrac{x}{v_0 \cdot \cos(\alpha)}}$

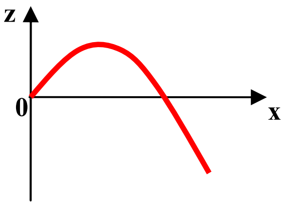
En remplaçant **t** l'équation horaire **z(t)** on obtient **l'équation de la trajectoire du projectile z = f(x)** :

$\mathbf{z(t)} = -\dfrac{1}{2} \cdot g \times t^2 + v_{0z} \times t$ donc $\mathbf{z(x)} = -\dfrac{1}{2} \cdot g \times \dfrac{x^2}{[v_0 \cdot \cos(\alpha)]^2} + v_0 \cdot \sin(\alpha) \times \dfrac{x}{v_0 \cdot \cos(\alpha)}$

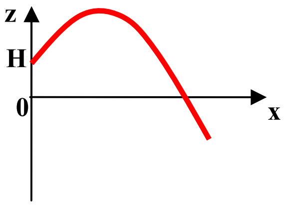
En simplifiant on a:

$$\boxed{\mathbf{z(x) = -\frac{1}{2} \cdot g \times \frac{x^2}{[v_0 \cdot \cos(\alpha)]^2} + x \times \tan(\alpha)}}$$

L'équation de la trajectoire est celle d'une parabole (dont la concavité est vers le bas).
L'équation de la trajectoire <u>dépend des conditions initiales</u> $\mathbf{v_0}$ et $\boldsymbol{\alpha}$!



Si z(0) = H

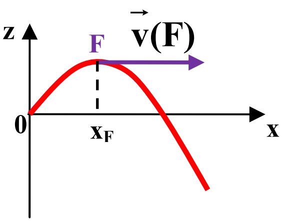


II.2. Notions de flèche et de portée

La **flèche** correspond à la **hauteur maximale que peut atteindre le projectile**, on la note **F**

La **flèche correspond au sommet de la parabole z(x)**. Voir Fig 3 p 214

Lorsque le projectile atteint la flèche alors la **composante verticale de la vitesse en ce point est nulle** donc $\mathbf{v_z(F) = 0\ m \cdot s^{-1}}$



$$\mathbf{v_z = -g \cdot t_F + v_0 \cdot \sin(\alpha) = 0}$$

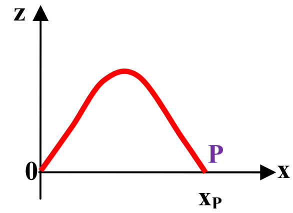
Soit l'instant $\mathbf{t_F}$ où le projectile est à sa hauteur maximale est : $\mathbf{t_F = \frac{v_0 \cdot \sin(\alpha)}{g}}$ et donc la hauteur maximale $\mathbf{z_F}$ (flèche) aura pour expression :

$$\mathbf{z(t_F)} = -\frac{1}{2}\cdot g \times {t_F}^2 + (v_0 \cdot \sin(\alpha)) \times t_F$$

$$\mathbf{z(t_F)} = -\frac{1}{2}\cdot g \times \frac{{v_0}^2 \cdot \sin^2(\alpha)}{g^2} + \frac{{v_0}^2 \cdot \sin^2(\alpha)}{g}$$

ce qui donne après simplification : $\boxed{\mathbf{z(t_F) = \frac{1}{2} \cdot \frac{{v_0}^2 \cdot \sin^2(\alpha)}{g}}}$

La **portée** correspond à la **distance maximale que peut atteindre le projectile**, on la note **P.**
C'est **le point d'intersection du projectile avec l'axe horizontal Ox qui correspond souvent au sol**
Voir Fig 3 p 214
Lorsque le projectile atteint le point P alors $\mathbf{z(x_P) = 0}$



Soit :

$$\mathbf{z(x_P)} = -\frac{1}{2}\cdot g \times \frac{{x_P}^2}{[v_0 \cdot \cos(\alpha)]^2} + x_P \times \tan(\alpha) = 0$$

$$\mathbf{z(x_P)} = x_P \times \left[-\frac{1}{2}\cdot g \times \frac{x_P}{{v_0}^2 \cdot \cos^2(\alpha)} + \tan(\alpha) \right] = 0$$

Les deux solutions analytiques sont :

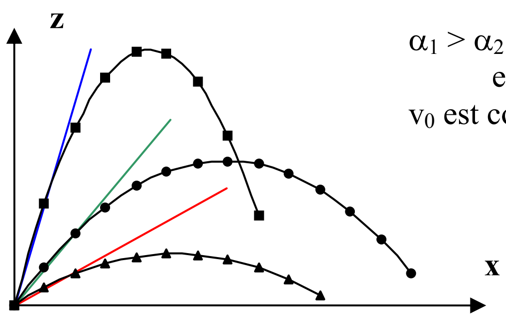
- $\mathbf{x_P = 0}$ mais cela n'a aucun intérêt physique !!!
- $\mathbf{x_P = \frac{2 \cdot {v_0}^2 \cdot \cos^2(\alpha) \times \tan(\alpha)}{g}}$ ce qui donne par simplification $\mathbf{x_P = \frac{{v_0}^2 \cdot \sin(2\alpha)}{g}}$

(car $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ et $2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) = \sin(2\alpha)$)

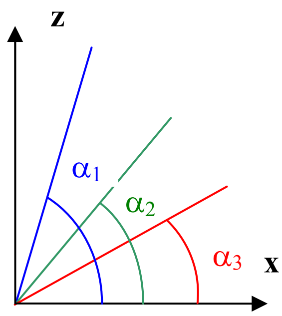
II.3. Influence des conditions initiales sur la trajectoire

Pour une même valeur de vitesse initiale v_0, l'angle de tir α a une importance sur la flèche et la portée.

La **portée sera maximale lorsque l'angle de tir est $\alpha = 45°$** (car sin $(2\alpha) = 1$ et donc $x_P = \frac{{v_0}^2}{g}$)



$\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3$
et
v_0 est constant



Pour une même direction (même angle de tir), plus v_0 est grand, plus la flèche et la portée seront importantes. **Figure 4 B p 215**
Attention, dans ce cas on ne pourra plus négliger les frottements de l'air.