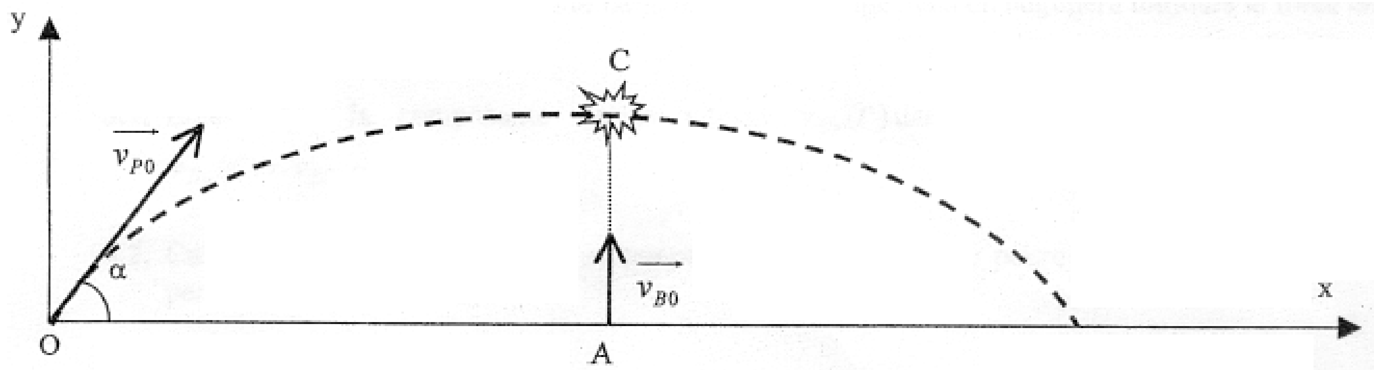
Exercices sur le mouvement parabolique dans un champ de pesanteur uniforme

Exercice N°1

On étudie le mouvement d'un pigeon d'argile lancé pour servir de cible à un tireur de ball-trap.
Le pigeon d'argile de masse $m_P = 0,10$ kg assimilé à un point matériel M est lancé avec un vecteur vitesse $\overrightarrow{V_{PO}}$ de valeur $\|\overrightarrow{V_{PO}}\| = 30$ m.s^{-1} faisant un angle α de 45° par rapport à l'horizontale. Le participant situé en A tire verticalement une balle de masse $m_B = 0,020$ kg avec un fusil. La vitesse initiale de la balle est $\|\overrightarrow{V_{BO}}\| = 500$ m.s^{-1}, la balle, assimilée à un point matériel B, part du point A tel que OA = 45 m (Les vecteurs vitesse ne sont pas à l'échelle sur le schéma).
On donne $g = 10$ m.s^{-2}.
Attention : les temps correspondants à chaque mouvement sont notés différemment : *t* pour le pigeon d'argile et *t'* pour la balle de fusil.



1. Étude du mouvement du pigeon d'argile

On notera *t* le temps associé au mouvement du pigeon d'argile. A l'origine du mouvement *t* = 0.

1.1. On négligera les frottements sur le pigeon d'argile. Etablir l'expression $\overrightarrow{a_P}$ de son accélération à partir du bilan des forces.

1.2. Donner les composantes de l'accélération $\overrightarrow{a_P}$ dans le repère (O, x, y).

1.3. Établir les composantes $v_{Px}(t)$ et $v_{Py}(t)$ du vecteur vitesse $\vec{v}_P$ dans le repère (O, x, y) en fonction du temps *t* .

1.4. Établir les composantes $x_P(t)$ et $y_P(t)$ du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ dans le repère (O, x, y) en fonction du temps *t* .

2. Tir réussi

2.1. Quelle est l'abscisse x_C du point d'impact C du pigeon d'argile et de la balle ?

2.2. Vérifier, à partir de l'abscisse x_C de l'impact, que le temps de « vol » du pigeon est $\Delta t = 2,1$ s.

2.3. On néglige toutes les forces s'exerçant sur la balle.

2.3.1. Que peut-on dire de son accélération a_B ? Que peut-on dire de sa vitesse v_B ? Déterminer alors la vitesse v_B.

2.3.2. Calculer $\Delta t'$ le temps de « vol » de la balle jusqu'à l'impact connaissant l'ordonnée du point de l'impact $y_C = 22$ m.

2.4. Comparer Δt et $\Delta t'$ et expliquer pourquoi le tireur peut viser directement le pigeon.

3. Discussion de l'effet du poids de la balle

Dans cette partie l'effet du poids de la balle n'est plus négligé mais on négligera toujours la force de frottement de l'air.

3.1. Établir que la composante de la vitesse $v_{By}(t')$ dans le repère (O,x,y) vérifie l'équation $v_{By}(t') = v_{B0} - g\,t'$.

3.2. Calculer la vitesse v_{By} au bout d'un temps $\Delta t' = 0,044$ s, justifier pourquoi on a négligé le poids dans la partie 2.

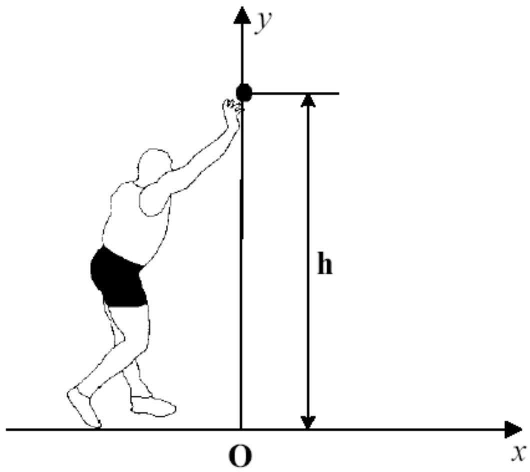
Exercice N°2

Lors des derniers championnats du monde d'athlétisme qui eurent lieu à Paris en août 2003, le vainqueur de l'épreuve du lancer du poids (Andrey Mikhnevich) a réussi un jet à une distance D = 21,69 m.
Pour simplifier les raisonnements, on ne travaillera que sur le centre d'inertie du boulet (nom courant donné au poids).

L'entraîneur de l'un de ses concurrents souhaite étudier ce lancer. Pour cela il dispose pour le centre d'inertie du boulet, en plus de la valeur 21,69m du record, de la vitesse initiale v_0 mesurée à l'aide d'un cinémomètre et de l'altitude h.
Données: $v_0 = 13,7\ m.s^{-1}$
$h = 2,62\ m$

Un logiciel informatique lui permet de réaliser une simulation de ce lancer et de déterminer la valeur de l'angle du vecteur vitesse initiale avec l'horizontale soit $\alpha = 43°$.

Pour l'étude on définit le repère d'espace (O,x,y) représenté ci-contre:
- Oy est un axe vertical ascendant passant par le centre d'inertie du boulet à l'instant où il quitte la main du lanceur.
- Ox est un axe horizontal au niveau du sol, dirigé vers la droite et dans le plan vertical de la trajectoire.
L'entraîneur a étudié le mouvement du centre d'inertie du boulet et a obtenu 3 graphes:
- *le graphe de la trajectoire y = f(x) du boulet en* ***ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE;***
- *les graphes de v_x et de v_y en fonction du temps (figures 1 et 2 données ci-dessous) où v_x et v_y sont les composantes (ou coordonnées) horizontales et verticale du vecteur vitesse.*



Pour chacun des graphes, les dates correspondant à deux points successifs sont séparées par le même intervalle de temps.

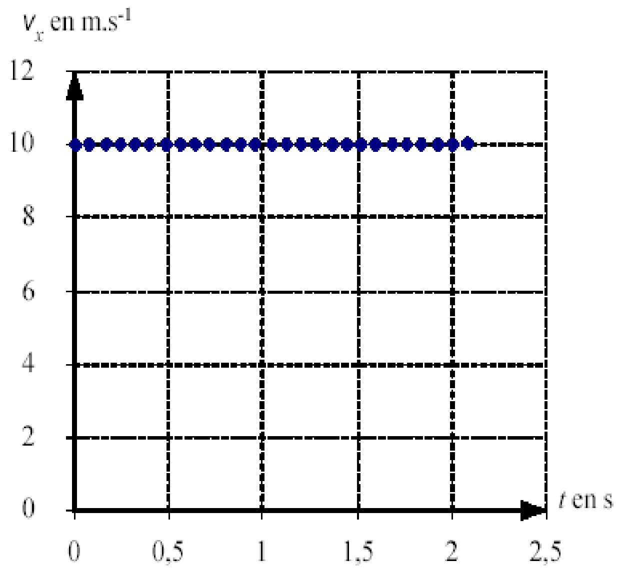


Figure 1

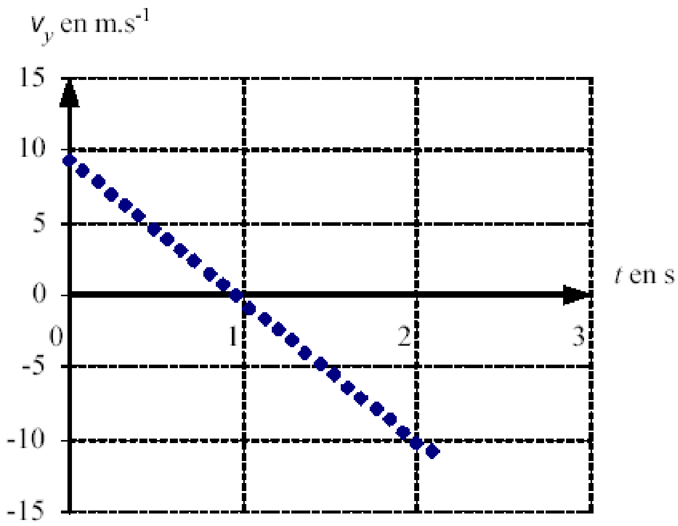


Figure 2

1. Étude des résultats de la simulation.

1.1. Étude de la projection horizontale du mouvement du centre d'inertie du boulet.

En utilisant la figure 1, déterminer:

1.1.1. La composante v_{0x} du vecteur vitesse du centre d'inertie du boulet à l'instant de date $t = 0$ s.

1.1.2. La nature du mouvement de la projection du centre d'inertie sur l'axe Ox en justifiant la réponse.

1.1.3. La composante v_{Sx} du vecteur vitesse du centre d'inertie lorsque le boulet est au sommet S de sa trajectoire.

1.2. Étude des conditions initiales du lancer.

1.2.1. En utilisant la figure 2, déterminer la composante v_{0y} du vecteur vitesse à l'instant de date $t = 0$ s.

1.2.2. À partir des résultats précédents, vérifier que la valeur de la vitesse instantanée et l'angle de tir sont compatibles avec les valeurs respectives $v_0 = 13{,}7$ m.s^{-1} et $\alpha = 43°$ données dans le texte.

1.3. Étude du vecteur vitesse du centre d'inertie du boulet.

1.3.1. Déterminer toutes les caractéristiques du vecteur vitesse du centre d'inertie du boulet au sommet de la trajectoire.

1.3.2. Sur le graphe $y = f(x)$ donné en **ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE,**
tracer en cohérence avec les résultats des questions 1.1.1., 1.1.3., et 1.2.1. :

- le vecteur vitesse $\vec{v}_0$ du centre d'inertie du boulet à l'instant du lancer ;
- le vecteur vitesse $\vec{v}_S$ du centre d'inertie du boulet au sommet de la trajectoire.

Aucune échelle n'est exigée.

2. Étude théorique du mouvement du centre d'inertie.

Le boulet est une sphère de volume V et de masse volumique $\mu = 7{,}10 \times 10^{3}$ kg.m^{-3}.
La masse volumique de l'air est $\mu' = 1{,}29$ kg.m^{-3}.

2.1. Exprimer littéralement la valeur P_A de la poussée d'Archimède exercée par l'air sur ce boulet ainsi que la valeur P de son poids. Montrer que P_A est négligeable devant P.

2.2. Par application de la 2ème loi de Newton (ou théorème du centre d'inertie), dans le référentiel terrestre supposé galiléen, déterminer le vecteur accélération du centre d'inertie du boulet lors du mouvement (on supposera que, compte tenu des faibles vitesses atteintes, les frottements dus à l'air au cours du jet sont négligeables).

2.3. Dans le repère d'espace défini en introduction, montrer que les équations horaires du mouvement s'expriment sous la forme:

$$x(t) = (v_0 . \cos\alpha) . t \qquad \text{et} \qquad y(t) = -\frac{1}{2} . g . t^2 + (v_0 . \sin\alpha) . t + h$$

où v_0 est la vitesse initiale du jet et α l'angle initial de tir (angle entre l'horizontale et le vecteur vitesse initiale $\vec{v}_0$).

2.4. En déduire l'équation de la trajectoire du centre d'inertie.

3. Comment améliorer la performance d'un lanceur ?

L'entraîneur veut ensuite savoir sur quel(s) paramètre(s) il peut travailler pour améliorer la performance de l'athlète. Celui-ci est plus petit que le recordman du monde, sa taille est telle que l'altitude initiale de ses lancers n'est au maximum que de h' = 2,45 m.

L'entraîneur décide donc d'étudier l'influence de la valeur v_0 de la vitesse initiale du lancer et de l'angle de tir α.

Il réalise des séries de simulations rassemblées dans les réseaux de courbes correspondants aux figures 3 et 4.

Sur la figure 3, l'angle de tir est maintenu constant soit $\alpha = 41°$

Sur la figure 4, la vitesse est maintenue constante soit $v_0 = 13{,}8$ m.s^{-1}

Figure 3 (α = 41°)

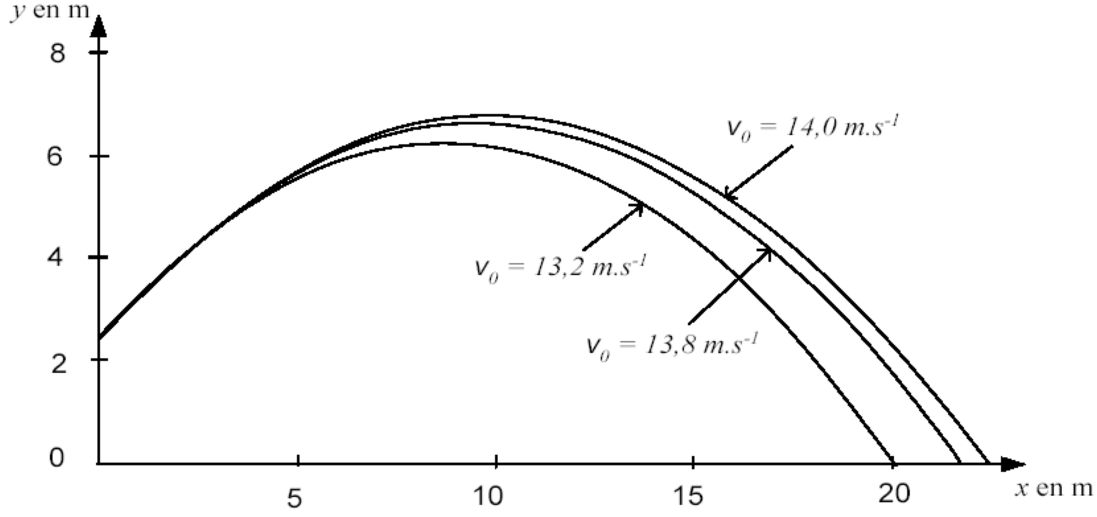
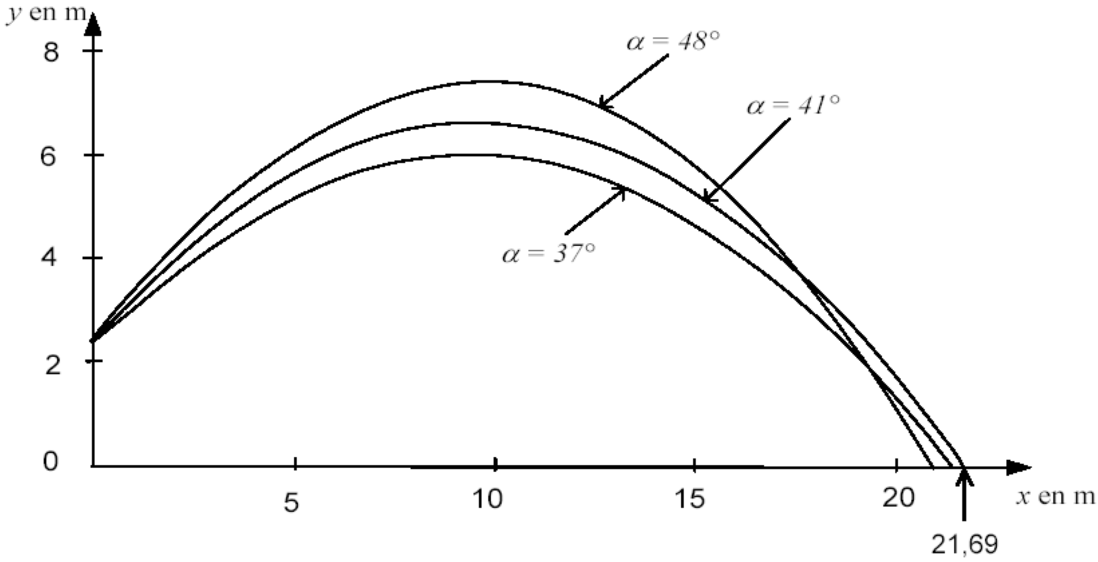


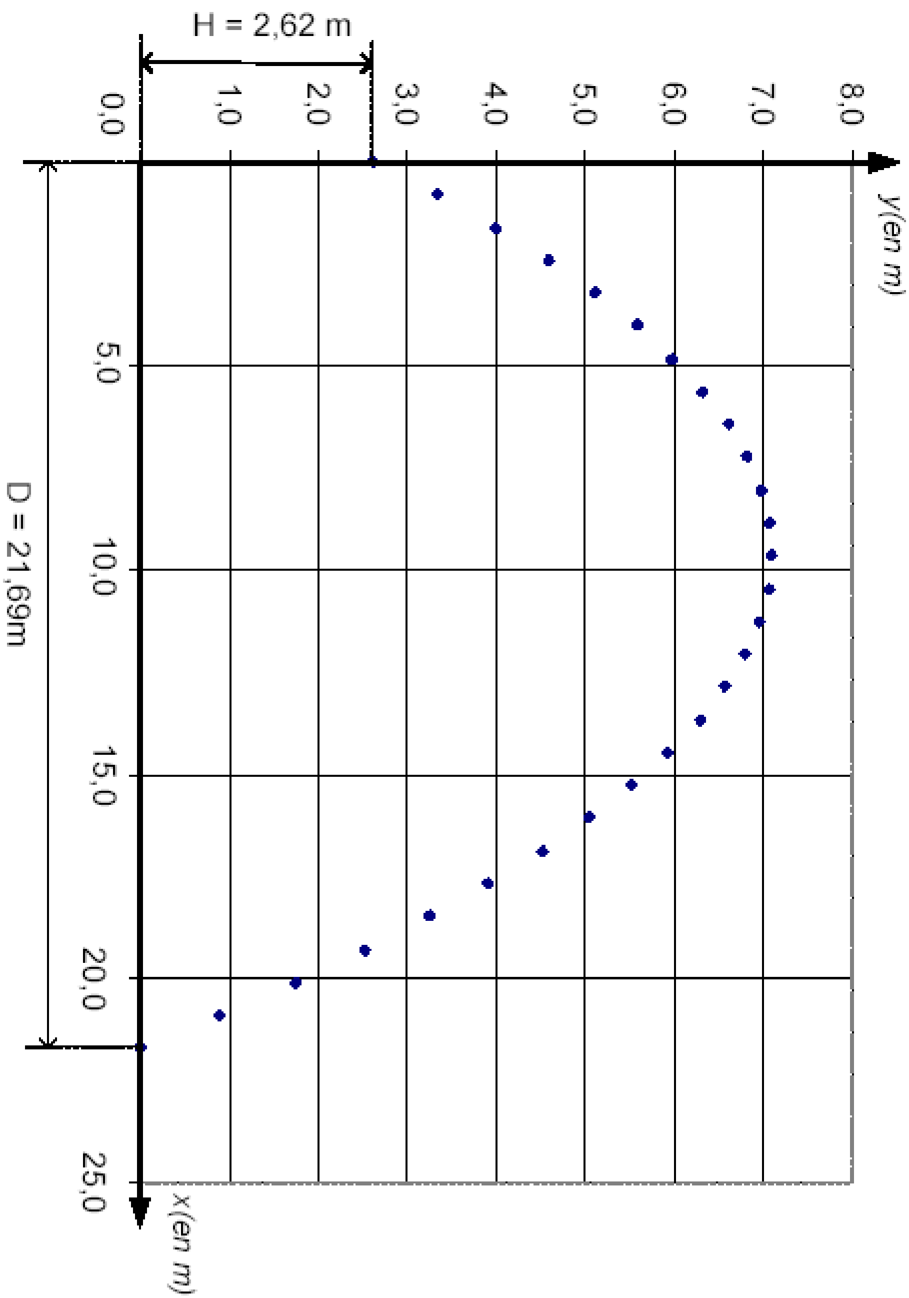
Figure 4 (v_0 = 13,8 m.s^{-1})



3.1. À partir des figures 3 et 4, entourer, dans le tableau de l'**ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE**, la proposition correcte donnant l'évolution de la longueur du jet pour:

- l'angle α fixé ;
- la valeur v_0 fixée.

3.2. Confronter les figures 3 et 4 pour en déduire si, parmi les combinaisons proposées, il en existe une satisfaisante pour battre le record du monde. Justifier la réponse.



angle α fixé	vitesse initiale v_0 fixée
Quand v_0 augmente, la distance horizontale *D* du jet: - augmente - diminue - est la même - augmente, passe par un maximum puis diminue - diminue, passe par un minimum puis augmente	Quand α augmente la distance horizontale *D* du jet: - augmente - diminue - est la même - augmente, passe par un maximum puis diminue - diminue, passe par un minimum puis augmente

Exercice N°3

Pratiqué depuis l'Antiquité sous le nom de « jeu de crosses », le hockey sur gazon est un sport olympique depuis 1908. Il se pratique sur une pelouse naturelle ou synthétique, de dimensions quasi identiques à celles d'un terrain de football. Chaque joueur propulse la balle avec une crosse ; l'objectif étant de mettre la balle dans le but.

Dans cet exercice, on étudie le mouvement de la balle de centre d'inertie G et de masse m, dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Cette étude peut être décomposée en deux phases.

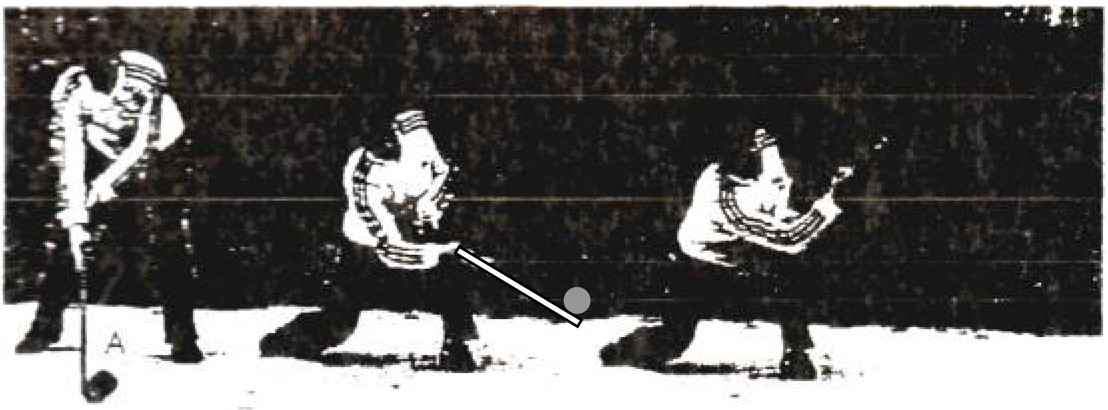


Figure 1 Figure 2 Figure 3

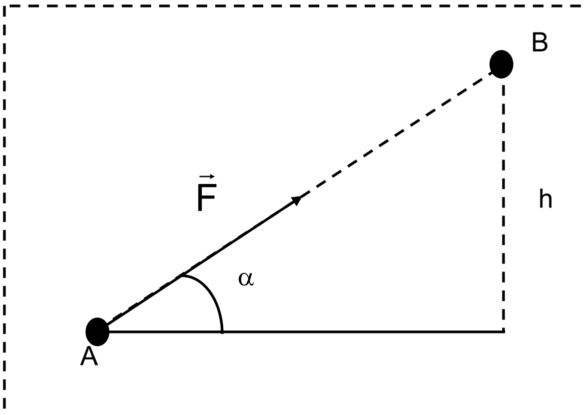


Figure 4

Les parties A, B et C sont indépendantes.

A - Première phase

Durant cette phase, on néglige toutes les actions liées à l'air ainsi que le poids de la balle.

1. *La première phase est illustrée par les figures* 1 *et* 2 *représentées sur la photographie ci-dessus et schématisée par la figure* 4. *Au point* A, *la balle est immobile. Entre les points* A *et* B, *elle reste en contact avec la crosse. La force* $\vec{F}$ *exercée par la crosse sur la balle, supposée constante, est représentée sur la figure* 4. *Le segment* AB *représentant la trajectoire de la balle est incliné d'un angle* α = *30° avec l'horizontale.*

Données : - *masse de la balle :* m = 160 g
- *intensité du champ de pesanteur :* g = 9,8 m.s^{-2}.

1.1. Énoncer la deuxième loi de Newton et l'appliquer à la balle lors de son trajet entre A et B.

1.2. Que peut-on dire de la nature du mouvement de la balle entre A et B ?

2. La force $\vec{F}$ s'exerce pendant une durée Δt = 0,11 s. La balle part du point A sans vitesse initiale et arrive en B avec une vitesse $\overrightarrow{v_B}$ telle que v_B =14 m.s^{-1}.

2.1. Donner l'expression du vecteur accélération en fonction du vecteur vitesse.

2.2. Calculer la valeur de l'accélération du centre d'inertie de la balle entre les points A et B.

3. En utilisant les résultats obtenus en 1.1.2, calculer l'intensité de la force exercée sur la balle par la crosse. L'hypothèse concernant le poids de la balle est-elle justifiée ?

B - <u>Deuxième phase</u>

Au point *B*, la balle quitte la crosse à la date t = 0 avec le vecteur vitesse $\overrightarrow{v_B}$ contenu dans le plan (xOz) ; c'est la deuxième phase du mouvement correspondant à la figure 3 de la photographie.

On néglige toutes les actions liées à l'air.

On étudie le mouvement du centre d'inertie G de la balle dans le champ de pesanteur supposé uniforme.

Le système d'axes utilisé est représenté sur le schéma ci-dessous : l'axe Ox *est horizontal dirigé vers la droite et* Oz *est vertical et dirigé vers le haut. L'origine des axes est située à la verticale du point B telle que* OB = h = 0,40 m.

1. Trajectoire de la balle.
   - 1.1. Donner l'expression des coordonnées v_{Bx} et v_{Bz} du vecteur vitesse $\overrightarrow{v_B}$ de la balle à l'instant t = 0 s, en fonction de v_B et de α.
   - 1.2 Donner l'expression des coordonnées x_B et z_B du vecteur $\overrightarrow{OB}$ de la balle au point B.
   - 1.3. En appliquant la deuxième loi de Newton, on obtient les équations horaires suivantes :

$$\overrightarrow{a_G}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_z = -g \end{cases} \qquad \vec{v}\begin{cases} v_x = v_B.\cos\alpha \\ v_z = v_B.\sin\alpha - gt \end{cases}$$

   Montrer que la valeur v_S de la vitesse de la balle au sommet S de la trajectoire est $v_S = 12\ m.s^{-1}$.
   - 1.4. Montrer que les coordonnées du vecteur position $\overrightarrow{OG}$ du centre d'inertie de la balle sont les suivantes :

$$\overrightarrow{OG}\begin{cases} x = (v_B.\cos\alpha)t \\ z = h + (v_B.\sin\alpha)t - \frac{1}{2}g.t^2 \end{cases}$$

   - 1.5. En déduire l'équation de la trajectoire de la balle.

2. La ligne de but est située à une distance d = 15 m du point O. La hauteur du but est L = 2,14 m.

On néglige le diamètre de la balle devant la hauteur du but.
   - 2.1. Quelles conditions doivent satisfaire x et z pour que le but soit marqué ?
   - 2.2. Vérifier que ces conditions sont bien réalisées.