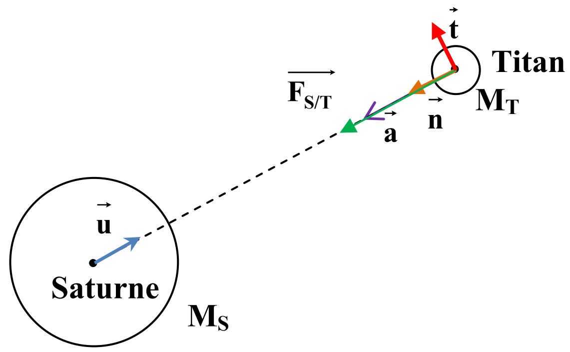
Corrigé Exercice 1

1. Quelques caractéristiques de Titan :



1.1.1. Système : {Titan}

Référentiel : saturnocentrique supposé galiléen

Bilan des forces extérieures :

force gravitationnelle de Saturne sur Titan $\overrightarrow{F_{S/T}}$

1.1.2.

1.1.3. $\mathbf{\overrightarrow{F_{S/T}} = -G \times \dfrac{M_S \times M_T}{R_T^{\,2}} \cdot \vec{u}}$

1.2.1. D'après la deuxième loi de Newton on a :

$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = M_T \cdot \vec{a}$

$\overrightarrow{F_{S/T}} = M_T \cdot \vec{a} = -G \times \dfrac{M_S \times M_T}{R_T^{\,2}} \cdot \vec{u}$ soit $\mathbf{\vec{a} = -G \times \dfrac{M_S}{R_T^{\,2}} \cdot \vec{u}}$, **l'accélération est radiale et centripète.**

1.2.2. Dans l'expression $\vec{a} = a_t\,\vec{t} + a_n\,\vec{n}$ on a $\mathbf{a_t = \dfrac{dv}{dt}}$ et $\mathbf{a_n = \dfrac{v^2}{R_T}}$

1.2.3. On sait que $\vec{a} = a_t\,\vec{t} + a_n\,\vec{n}$ et que $\vec{a} = -G \times \dfrac{M_S}{R_T^{\,2}} \cdot \vec{u} = G \times \dfrac{M_S}{R_T^{\,2}} \cdot \vec{n}$ donc par identification on a :

$\mathbf{a_t = 0}$ et $\mathbf{a_n = G \times \dfrac{M_S}{R_T^{\,2}}}$. L'accélération vectorielle de Titan dans la base orthonormée $(\vec{t}, \vec{n})$ se réduit donc uniquement à la **composante normale**.

1.3.1. La **vitesse est constante car le terme** $\mathbf{a_t = \dfrac{dv}{dt} = 0}$ **donc c'est que v = C**^{ste} donc le **mouvement est uniforme.**

1.3.2. $a_n = G \times \dfrac{M_S}{R_T^{\,2}} = \dfrac{v^2}{R_T}$ donc $v^2 = G \times \dfrac{M_S}{R_T}$ soit $\mathbf{v = \sqrt{G \times \dfrac{M_S}{R_T}}}$

2. D'autres satellites de Saturne :

2.1.1. Comme $T = \dfrac{2\pi \cdot R_E}{v}$ et $v = \sqrt{G \times \dfrac{M_S}{R_E}}$ alors $T = \dfrac{2\pi \cdot R_E}{\sqrt{G \times \dfrac{M_S}{R_E}}}$ soit $T^2 = \dfrac{4\pi^2 \cdot R_E^{\,2}}{G \times \dfrac{M_S}{R_E}}$ d'où $T^2 = \dfrac{4\pi^2 \cdot R_E^{\,3}}{G \times M_S}$ soit

$$\boxed{\mathbf{\frac{T^2}{R_E^{\,3}} = \frac{4\pi^2}{G \times M_S}}}$$

2.1.2. $R_E^{\,3} = \dfrac{G \times M_S \times T^2}{4\pi^2}$ donc $\mathbf{R_E = \sqrt[3]{\dfrac{G \times M_S \times T^2}{4\pi^2}} = \left(\dfrac{G \times M_S \times T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}}$

A.N. : $\mathbf{R_E} = \left(\dfrac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \times 5{,}69 \cdot 10^{26} \times (1{,}37 \times 24 \times 60 \times 60)^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} \mathbf{= 2{,}38 \cdot 10^8\,m = 2{,}38 \cdot 10^5\,km}$

3. Sonde saturno-stationnaire :

3.1. Pour que la sonde soit saturno-stationnaire il faut que **Ts = Tc**

3.2.1. En utilisant la troisième loi de Kepler donnée à la question **2.1.1.** on peut écrire $\dfrac{T_S^{\,2}}{(R_S + h)^3} = \dfrac{4\pi^2}{G \times M_S}$

car $R_C = R_S + h$ donc $(R_S + h)^3 = \dfrac{G \times M_S \times T_S^{\,2}}{4\pi^2}$ soit $R_S + h = \sqrt[3]{\dfrac{G \times M_S \times T_S^{\,2}}{4\pi^2}}$ donc $\mathbf{h = \sqrt[3]{\dfrac{G \times M_S \times T_S^{\,2}}{4\pi^2}} - R_S}$

3.2.2. A.N. : $\mathbf{h} = \sqrt[3]{\dfrac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \times 5{,}69 \cdot 10^{26} \times (10 \times 60 \times 60 + 39 \times 60)^2}{4\pi^2}} - 6{,}0 \cdot 10^4 \cdot 10^3 \mathbf{= 5{,}2 \cdot 10^7\,m = 5{,}2 \cdot 10^4\,km}$

Corrigé Exercice 2

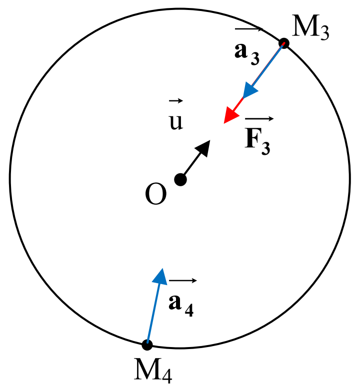
1.1. <u>Planètes en orbite elliptique.</u>

1.1.1. D'après la 1ère loi de Kepler (loi des orbites), dans le référentiel héliocentrique la trajectoire des planètes est une ellipse dont l'un des foyers est occupé par le Soleil, donc le Soleil est sur le foyer F_1.

1.1.2. D'après la 2ème loi de Kepler (loi des aires), le segment de droite reliant le Soleil, S, à la planète, M, (le segment [SM]) balaie des aires $\mathcal{A}$ égales pendant des durées Δt égales donc $\mathbf{A_1 = A_2}$.

1.1.3. D'après la question précédente pour un intervalle de temps identique Δt les aires sont identiques mais pas les distances parcourues : la distance $M_2M'_2$ est supérieure à $M_1M'_1$ soit $\mathbf{M_2M'_2 > M_1M'_1}$

Comme $v_1 = \dfrac{M_1M_1'}{\Delta t}$ et $v_2 = \dfrac{M_2M_2'}{\Delta t}$ alors $\mathbf{v_1 < v_2}$.



1.2. <u>Planètes en orbite circulaire.</u>

1.2.1.

1.2.2. <u>Système</u> : {planète} <u>Référentiel</u> : héliocentrique (galiléen)

$$\overrightarrow{\mathbf{F_3}} = -\,\mathbf{G} \times \frac{\mathbf{M_S \times m}}{\mathbf{OM_3}^2} \cdot \vec{\mathbf{u}} = -\,\mathbf{G} \times \frac{\mathbf{M_S \times m}}{\mathbf{r^2}} \cdot \vec{\mathbf{u}}$$

1.2.3. D'après la deuxième loi de Newton on a :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m \cdot \vec{a}$$

$$\overrightarrow{F_3} = m \cdot \vec{a} = -\,G \times \frac{M_S \times m}{r^2} \cdot \vec{u} \quad \text{soit} \quad \vec{\mathbf{a}} = -\,\mathbf{G} \times \frac{\mathbf{M_S}}{\mathbf{r^2}} \cdot \vec{\mathbf{u}}$$

1.2.4.

1.2.5. L'accélération est radiale et centripète et la force $\overrightarrow{F_3}$ a une norme constante donc l'accélération a une valeur constante : **le mouvement est donc circulaire et uniforme**.

1.2.6. La troisième loi de Kepler (loi des périodes) dit que : $\dfrac{\mathbf{T^2}}{\mathbf{r^3}} = \dfrac{\mathbf{4\pi^2}}{\mathbf{G \times M_S}}$ soit $\mathbf{T^2} = \dfrac{\mathbf{4\pi^2}}{\mathbf{G \times M_S}} \times \mathbf{r^3}$ ainsi le graphe **$\mathbf{T^2 = f(r^3)}$ doit être une fonction linéaire** ce qui est le cas. La pente a pour expression : $\dfrac{\mathbf{4\pi^2}}{\mathbf{G \times M_S}}$

1.2.7. $\dfrac{\mathbf{T^2}}{\mathbf{r^3}}$ représente la pente de la fonction linéaire, en prenant 1 point du graphique on en déduit la valeur de la pente : $\dfrac{\mathbf{T^2}}{\mathbf{r^3}} = \dfrac{0{,}60 \cdot 10^{17}}{2{,}0 \cdot 10^{35}} = \mathbf{3{,}0 \cdot 10^{-19}\, s^2 \cdot m^{-3}}$

1.2.8. D'après l'article on sait que T = 6,521 ans et d'après la question précédente on a : $r^3 = \dfrac{T^2}{3{,}0 \cdot 10^{-19}}$ soit

$$\mathbf{r} = \sqrt[3]{\frac{\mathbf{T^2}}{\mathbf{3{,}0 \cdot 10^{-19}}}} = \sqrt[3]{\frac{(6{,}521 \times 365 \times 24 \times 60 \times 60)^2}{3{,}0 \cdot 10^{-19}}} = \mathbf{5{,}2 \cdot 10^{11}\, m = 5{,}2 \cdot 10^{8}\, km}$$

2. <u>La troisième loi de Kepler comme balance cosmique…</u>

2.1. **T (s)** : période de révolution du satellite — **r (m)** : rayon de l'orbite du satellite

M (kg) : Masse de Rhea Sylvia — **G** : constante de gravitation universelle

$G = \dfrac{4\pi^2}{T^2 \times M} \times r^3$ donc G a pour unités : $\mathbf{m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}}$.

2.2. $\mathbf{M} = \dfrac{\mathbf{4\pi^2}}{\mathbf{T^2 \times G}} \times \mathbf{r^3}$ or T = 87,6 h donc $\mathbf{M} = \dfrac{4\pi^2}{(87{,}6 \times 60 \times 60)^2 \times 6{,}67 \cdot 10^{-11}} \times (1360 \cdot 10^3)^3 = \mathbf{1{,}5 \cdot 10^{19}\, kg}$