# Exercices sur le mouvement des satellites et planètes

## Exercice 1

En Juillet 2004, la sonde européenne Cassini-Huygens nous a livré ses premiers clichés des anneaux de Saturne.
Elle a également photographié Titan, le plus gros satellite de Saturne, situé à une distance $R_T$ de Saturne.
L'excentricité orbitale des satellites étant très faible, on supposera leurs trajectoires circulaires.
Dans tout l'exercice, on se place dans le référentiel saturno-centrique, centré sur Saturne et dont les trois axes sont dirigés vers trois étoiles lointaines supposées fixes.
On considère que la planète Saturne et ses satellites sont des corps dont la répartition des masses est à symétrie sphérique. Les rayons des orbites des satellites sont supposés grands devant leur taille.

**<u>Données :</u>** $G = 6{,}67\times10^{-11}$ S.I. : constante de gravitation universelle.
Concernant Titan : $R_T = 1{,}22\times10^{6}$ km (rayon de l'orbite de Titan).
Concernant Saturne : $R_S = 6{,}0\times10^{4}$ km (rayon de la planète Saturne).
$T_S$ = 10 h 39 min (période de rotation de Saturne sur elle-même).
$M_S = 5{,}69\times10^{26}$ kg (masse de Saturne).

**1. <u>Quelques caractéristiques de Titan :</u>**

**1.1.** Forces

On considère que la seule force gravitationnelle exercée sur Titan provient de Saturne.

**1.1.1.** Nommer la (les) force(s) extérieure(s) appliquée(s) au satellite Titan, de masse $M_T$.

**1.1.2.** Représenter qualitativement sur un schéma, Saturne, Titan, et la (les) force(s) extérieure(s) appliquée(s) sur Titan.

**1.1.3.** Donner l'expression vectorielle de cette (ces) force(s).

**1.2.** Accélération et vitesse

On étudie le mouvement du centre d'inertie T de Titan. S est le centre d'inertie de Saturne.
Soit $\vec{u}$ le vecteur unitaire porté par la droite ST dirigé de S vers T.

**1.2.1.** Exprimer son accélération vectorielle $\vec{a}$ en précisant la loi utilisée.

**1.2.2.** On se place dans la base orthonormée $(\vec{t}, \vec{n})$ centrée en T dans laquelle $\vec{t}$ est un vecteur unitaire porté par la tangente à la trajectoire et orienté dans le sens du mouvement et $\vec{n}$ un vecteur unitaire perpendiculaire à $\vec{t}$ et dirigé vers l'intérieur de la trajectoire ($\vec{n} = -\vec{u}$).
On donne l'expression de $\vec{a}$ dans la base orthonormée $(\vec{t}, \vec{n})$ : $\vec{a} = a_t\,\vec{t} + a_n\,\vec{n}$.
Donner les expressions littérales de $a_t$ et de $a_n$ en fonction de la vitesse v du satellite.

**1.2.3.** À quelle composante se réduit l'accélération vectorielle $\vec{a}$ de Titan dans la base orthonormée $(\vec{t}, \vec{n})$ ? Compléter alors le schéma précédent, avec la base orthonormée $(\vec{t}, \vec{n})$ et l'accélération $\vec{a}$ de Titan.

**1.3.** Type de mouvement

**1.3.1.** Montrer que le mouvement de Titan est uniforme.

**1.3.2.** Retrouver l'expression de la vitesse de Titan sur son orbite autour de Saturne : $v = \sqrt{\dfrac{GM_S}{R_T}}$

**2. <u>D'autres satellites de Saturne :</u>**

Après le survol de Titan, la sonde Cassini a survolé le satellite Encelade en février 2005.
On peut considérer que dans le référentiel saturno-centrique, Encelade à un mouvement de révolution circulaire uniforme, dont la période (en jour terrestre), est $T_E = 1{,}37$ et le rayon est $R_E$.

**2.1.** Loi de Kepler

La relation qui lie la période T de révolution d'un satellite, sa vitesse v et le rayon R de son orbite est $T = \dfrac{2\pi R}{v}$. Sa vitesse de révolution autour de Saturne est donnée par : $v = \sqrt{\dfrac{GM_S}{R}}$.

**2.1.1.** Retrouver la troisième loi de Kepler $\dfrac{T^2}{R^3} = \dfrac{4\pi^2}{GM_S}$.

**2.1.2.** Utiliser la troisième loi de Kepler pour déterminer la valeur du rayon $R_E$ de l'orbite d'Encelade.

**3. <u>Sonde saturno-stationnaire :</u>**

On cherche dans cette partie à déterminer l'altitude h à laquelle devrait se trouver la sonde Cassini pour être saturno-stationnaire (immobile au-dessus d'un point de l'équateur de Saturne).

**3.1.** Quelle condition doit-on avoir sur les périodes Ts (rotation de Saturne sur elle-même) et Tc (révolution de Cassini autour de Saturne) pour que la sonde soit « saturno-stationnaire »?

**3.2.** Altitude de la sonde

**3.2.1.** En utilisant la troisième loi de Kepler donnée à la question **2.1.1.** , montrer que l'altitude h de la sonde peut se calculer avec la relation: $h = \sqrt[3]{\dfrac{T_C^2 G M_S}{4\pi^2}} - R_S$

**3.2.2.** Calculer la valeur de h.

## <u>Exercice 2</u>

*L'objectif de cet exercice est d'étudier le mouvement de quelques planètes du système solaire et de déterminer la masse de l'astéroïde Rhea Sylvia, récemment découvert par une équipe d'astronomes. Celui-ci a la forme d'une grosse pomme de terre mesurant quelques centaines de kilomètres.*

*Par souci de simplification, dans tout l'exercice, les astres étudiés sont considérés à répartition sphérique de masse.*

*<u>Donnée :</u> constante de gravitation universelle $G = 6,67 \times 10^{-11}$ S.I*

***Les représentations vectorielles demandées sont à effectuer sans souci d'échelle.***

**1. <u>En hommage à Kepler</u>**

*« Johannes Kepler, né le 27 décembre 1571 à Weil der Stadt, près de Stuttgart (Allemagne), mort le 15 novembre 1630 à Ratisbonne, est un astronome célèbre. Il a étudié et confirmé l'hypothèse héliocentrique (la Terre tourne autour du Soleil) de Nicolas Copernic. Il a également découvert que les trajectoires des planètes n'étaient pas des cercles parfaits centrés sur le Soleil mais des ellipses. En outre, il a énoncé les lois (dites lois de Kepler) qui régissent les mouvements des planètes sur leurs orbites. »*

**1.1. <u>Planètes en orbite elliptique.</u>**

*La figure 10 ci-dessous représente la trajectoire elliptique du centre d'inertie M d'une planète du système solaire de masse m dans le référentiel héliocentrique considéré galiléen. Les deux foyers $F_1$ et $F_2$ de l'ellipse et son centre O sont indiqués.*

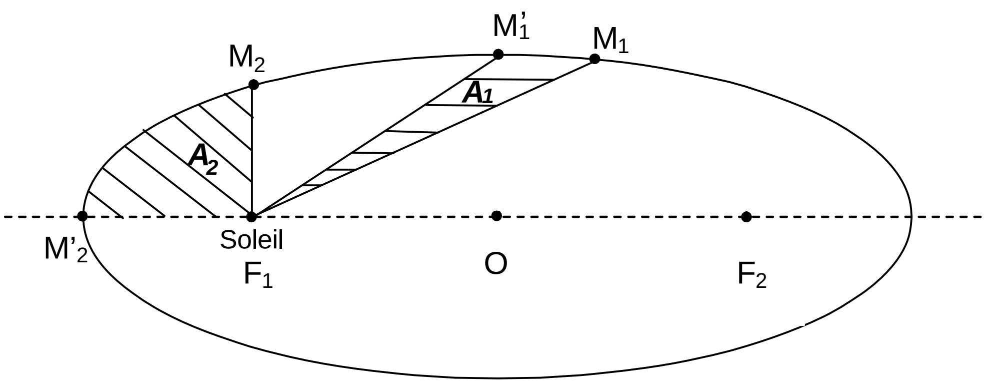


**Figure 10**

**1.1.1.** En utilisant une des lois de Kepler, justifier la position du Soleil indiquée sur la figure 10.

**1.1.2.** On suppose que les durées de parcours entre les points $M_1$ et $M'_1$ puis $M_2$ et $M'_2$ sont égales. En utilisant une des lois de Kepler, trouver la relation entre les aires hachurées $A_1$ et $A_2$ sur la figure 10.

**1.1.3.** La valeur de la vitesse moyenne entre les points $M_1$ et $M'_1$ est-elle inférieure, égale ou supérieure à celle entre les points $M_2$ et $M'_2$ ? Justifier.

**1.2. <u>Planètes en orbite circulaire.</u>**

*Dans cette partie, pour simplifier, on modélise les trajectoires des planètes du système solaire dans le référentiel héliocentrique par des cercles de rayon r dont le centre O est le Soleil de masse $M_S$.*

**1.2.1.** Représenter sur la ***FIGURE 11 DE L'ANNEXE*** la force de gravitation $\overrightarrow{F_3}$ exercée par le Soleil sur une planète quelconque du système solaire de masse *m* dont le centre d'inertie est situé au point $M_3$.

**1.2.2.** Donner l'expression vectorielle de cette force au point $M_3$, en utilisant le vecteur unitaire $\vec{u}$.

*Pour la suite on considère que les valeurs des autres forces de gravitation s'exerçant sur la planète sont négligeables par rapport à la valeur de $\overrightarrow{F_3}$.*

**1.2.3.** En citant la loi de Newton utilisée, déterminer l'expression du vecteur accélération $\overrightarrow{a_3}$ du centre d'inertie d'une planète quelconque de masse *m* du système solaire dont le centre d'inertie est situé au point $M_3$.

**1.2.4.** Représenter sur la ***FIGURE 11 DE L'ANNEXE*** les vecteurs accélérations $\overrightarrow{a_3}$ et $\overrightarrow{a_4}$ du centre d'inertie d'une planète quelconque du système solaire respectivement aux points $M_3$ et $M_4$.

**1.2.5.** En déduire la nature du mouvement du centre d'inertie d'une planète quelconque de masse *m* du système solaire.

**1.2.6.** Le graphe de la ***FIGURE 12 DE L'ANNEXE*** représente l'évolution du carré de la période de révolution des planètes Terre, Mars et Jupiter en fonction du cube du rayon de leur orbite. Ce graphe est-il en accord avec la troisième loi de Kepler ?

**1.2.7.** En utilisant le graphe de la ***FIGURE 12 DE L'ANNEXE***, montrer que

$$\frac{T^2}{r^3} \simeq 3{,}0 \times 10^{-19} \text{ S.I.}$$

**1.2.8.**

« *Une équipe composée de Franck Marchis (université de Californie à Berkeley) et de trois astronomes de l'Observatoire de Paris, Pascal Descamps, Daniel Hestroffer et Jérome Berthier, vient de découvrir un astéroïde, nommé Rhea Sylvia, qui gravite à une distance constante du Soleil avec une période de révolution de 6,521 ans.* »

*D'après un article paru dans LE MONDE le 13.07.2005*

À l'aide des données de l'article précédent et du résultat de la question 1.2.7., calculer la distance séparant les centres respectifs de Rhea Sylvia et du Soleil.

*Donnée : 1 an = 365 jours*

**2. <u>La troisième loi de Kepler comme balance cosmique…</u>**

*« Grâce au Very Large Telescope de l'European Southern Observatory (ESO) au Chili, les astronomes ont également découvert que Rhea Sylvia était accompagné de deux satellites baptisés Remus et Romulus. Leurs calculs ont montré que les deux satellites décrivent une orbite circulaire autour de Rhea Sylvia ; Romulus effectue son orbite en 87,6 heures. Les distances entre chaque satellite et Rhea Sylvia sont respectivement de 710 kilomètres pour Remus et 1360 kilomètres pour Romulus.»*

*D'après un article paru dans LE MONDE le 13.07.2005*

*On s'intéresse désormais au mouvement circulaire uniforme du centre d'inertie d'un satellite de Rhéa Sylvia. L'étude est faite dans un référentiel "Rhéa Sylvia-centrique" muni d'un repère dont l'origine est le centre de Rhéa Sylvia et dont les trois axes sont dirigés vers des étoiles fixes.*

**2.1.** On rappelle que la troisième loi de Kepler a pour expression littérale : $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M}$. Dans le cadre de l'étude du mouvement de Remus et Romulus autour de Rhea Sylvia, donner la signification de chaque grandeur et son unité. En déduire l'unité de G dans le système international.

**2.2.** À l'aide des données de l'article précédent et de la troisième loi de Kepler, déterminer la masse de l'astéroïde Rhea Sylvia.

## ANNEXE

**Questions 1.2.1 et 1.2.4.**

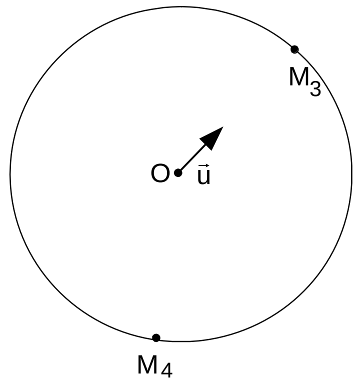


**Figure 11**

**Questions 1.2.6. et 1.2.7.**

$T^2 = f(r^3)$

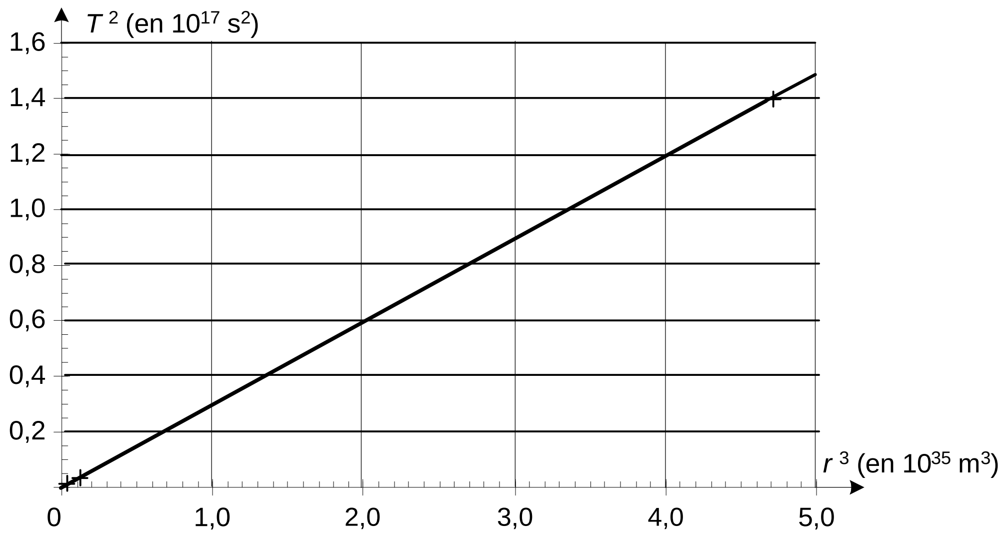


**Figure 12**