Chapitre 5 : Les systèmes mécaniques oscillants

Objectifs :

- *Définir un pendule simple et justifier la position d'équilibre dans le cas d'un pendule simple ;*
- *Définir l'écart à l'équilibre, l'abscisse angulaire, l'amplitude, la pseudo-période, la période propre et les mesurer sur un enregistrement ;*
- *Énoncer la loi d'isochronisme des petites oscillations, savoir comment un système peut atteindre un régime apériodique ;*
- *Savoir que dans le cas d'un amortissement faible, la pseudo-période est voisine de la période propre ;*
- *Pour un pendule simple, justifier la forme de l'expression de la période propre par analyse dimensionnelle ;*
- *À partir d'une série de résultats expérimentaux, vérifier la validité de l'expression de la période propre d'un pendule simple ;*
- *Connaître les caractéristiques de la force de rappel exercée par un ressort ;*
- *Appliquer la deuxième loi de Newton au solide et effectuer la résolution analytique dans le cas d'un dispositif oscillant horizontalement ; Connaître la signification de tous les termes intervenant dans la solution de l'équation différentielle et leur unité ;*
- *Connaître et savoir exploiter l'expression de la période propre, vérifier son homogénéité par analyse dimensionnelle ;*
- *Savoir que la résonance mécanique se produit lorsque la période de l'excitateur est voisine de la période propre du résonateur ;*
- *Savoir que l'augmentation de l'amortissement provoque une diminution de l'amplitude et connaître des exemples de résonance mécanique.*

I. Qu'est-ce qu'un système mécanique oscillant ?

I.1. Définition

Un **système mécanique oscillant** est un système dont **le centre d'inertie G décrit un mouvement périodique de va-et-vient autour d'une position d'équilibre stable**.

Ex : balancier d'une horloge, membrane d'un haut parleur suspension d'un quad, balançoire…

I.2. Différents types d'oscillations

Les **oscillations libres amorties** s'observent lorsqu'on écarte un système mécanique oscillant de sa position d'équilibre stable : le système oscille librement autour de cette position d'équilibre puis il finit par s'arrêter (frottements de l'air, mécaniques..).

Les **oscillations entretenues** s'observent quand un **dispositif extérieur fournit de l'énergie** nécessaire au système mécanique **pour compenser les amortissements** (*Ex* : horloge).

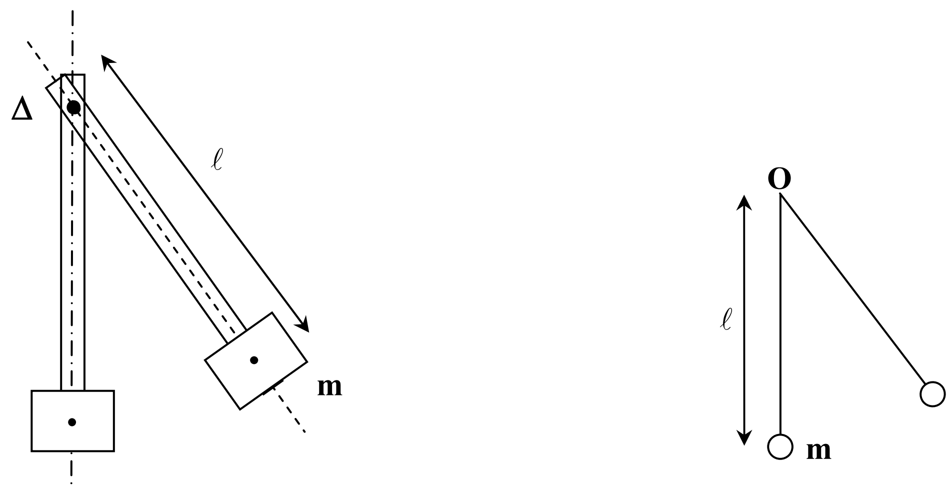
Les **oscillations forcées** s'observent si un **dispositif extérieur** (= **EXCITATEUR**) **impose la période des oscillations** à un **système mécanique oscillant** (= **RESONATEUR**) (c.f. **IV.**)

II. Étude du pendule pesant : modélisation par le pendule simple

II.1. Définitions

Un pendule pesant est constitué d'un solide pouvant osciller autour d'un axe horizontal fixe (**Δ**) sous l'action de son propre poids.

L'axe **Δ** ne passe pas par le centre d'inertie du solide (*Ex* : balancier d'une horloge).



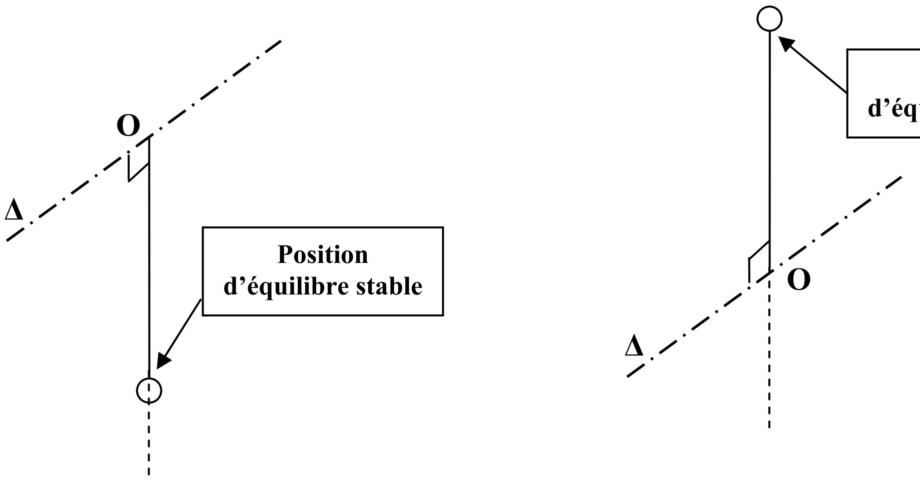
Pendule pesant ***Pendule simple***

Un **pendule simple** est un modèle idéal du pendule pesant. Il est constitué **d'un solide ponctuel** de masse ***m*** **fixée à l'extrémité d'un fil de longueur** ℓ de masse négligeable.

II.2. Position d'équilibre stable

Lorsque le centre d'inertie G du pendule est situé sur la verticale passant par l'axe de rotation Δ et qu'il se trouve sous cet axe alors le pendule est dans sa position d'équilibre stable.

À sa **position d'équilibre stable, le pendule simple est vertical**, l'objet ponctuel de masse ***m*** étant situé **en dessous du point d'attache** O.



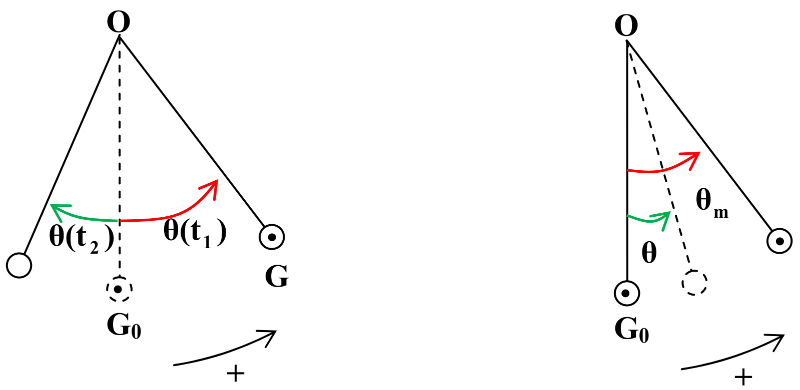
II.3. Écart à l'équilibre – abscisse angulaire – amplitude des oscillations

Le mouvement du pendule est décrit en mesurant une grandeur appelée **écart à l'équilibre.**

L'angle orienté $\theta(t) = \left(\overrightarrow{OG_0}, \overrightarrow{OG}\right)$ formé par la position d'équilibre stable du pendule (verticale) et sa position à la date *t* est appelé abscisse angulaire.
Son unité légale est **le radian (rad)** mais usuellement on l'exprime en degré (°).

$\boldsymbol{\theta(t)}$ prend successivement des valeurs **positives** et **négatives**.

<u>*Ex*</u> : $\theta(t_1) > 0$ et $\theta(t_2) < 0$

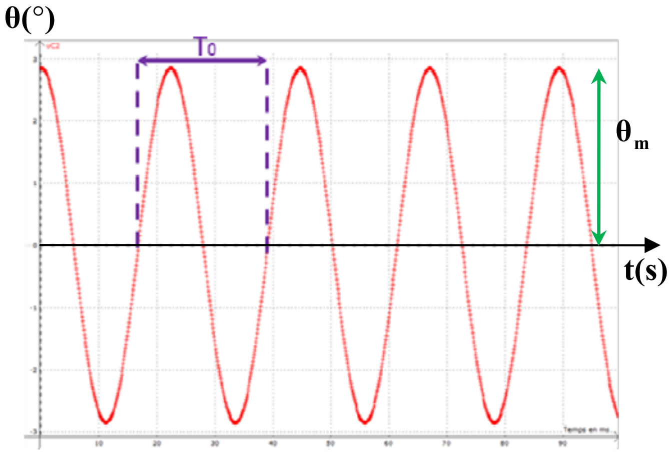


L'**amplitude** des oscillations correspond à la **valeur maximale de l'abscisse angulaire $\theta(t)$**.
On la note θ_m et elle s'exprime en radians (rad) ou en degrés (°)

II.4. Étude du mouvement du pendule simple

On considère un pendule simple constitué d'un solide de masse ***m***, initialement écarté de sa position d'équilibre stable.
L'abscisse angulaire initiale est $\theta_0 = \theta_m$.

a) Si les frottements sont négligeables (ou absence de frottement) :



Analogie avec le circuit (L,C)

La courbe $\theta(t)$ est **une fonction périodique sinsusoïdale**.
La **période propre** du pendule simple, notée T_0, représente la durée d'une oscillation : c'est la **durée entre 2 passages consécutifs du pendule par la même position et dans le même sens.**
T_0 s'exprime en seconde (s).

Pour des faibles amplitudes ($\theta_m < 20$ °) on parle **d'isochronisme des petites oscillations** : la période propre des oscillations T_0 **est indépendante de l'amplitude θ_m des oscillations**.

L'expression de T_0 dans ce cas sera :

$T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{\dfrac{\ell}{g}}$	T_0 : en *s*, période propre du pendule simple ℓ : en ***m***, longueur du fil du pendule **g** : en $N{\cdot}kg^{-1}$ ou $m{\cdot}s^{-2}$, intensité de la pesanteur

Équation aux dimensions :

$$\frac{[\ell]}{[g]} = \frac{[L]}{\frac{[L]}{[T]^2}} = [T]^2 \qquad \text{or} \qquad [2\pi] = 1 \qquad \text{donc} \qquad \left[2\pi \cdot \sqrt{\frac{\ell}{g}}\right] = [T]$$

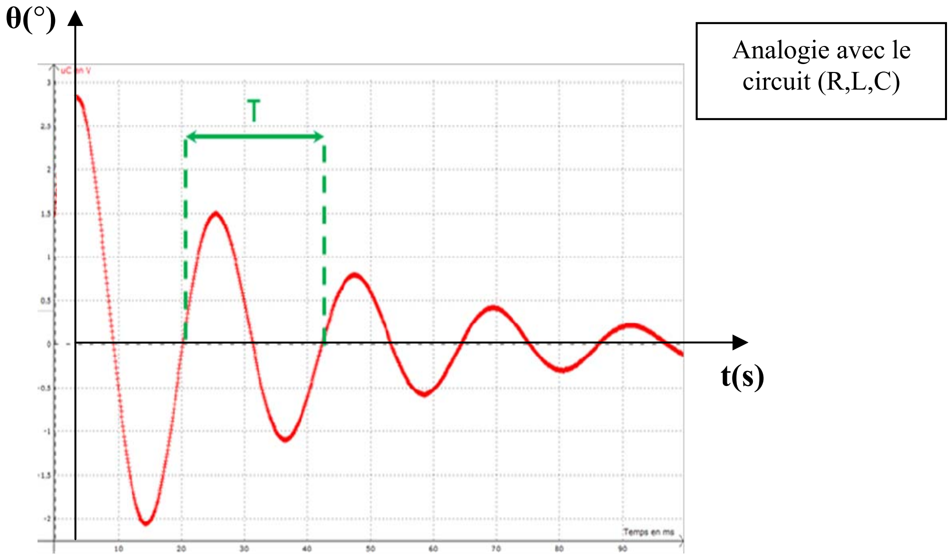
La **période propre** des oscillations du pendule simple **ne dépend pas de la masse *m* du pendule, ni de l'amplitude θ_m** (à condition que $\theta_m < 20$ °)

La fréquence propre de l'oscillateur (le pendule), notée f_0, est le nombre d'oscillations du pendule pendant une durée de 1 s.

$f_0 = \dfrac{1}{T_0}$	f_0 : en ***Hz***, fréquence propre du pendule T_0 : en *s*, période propre du pendule simple

b) Si les frottements ne sont plus négligeables **Figure 7 p 236**

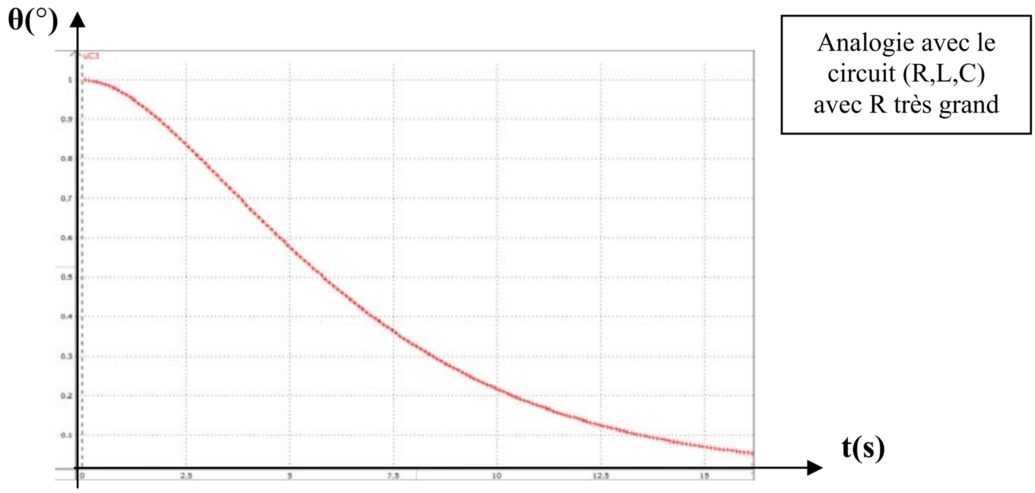
Si le pendule simple est soumis à des forces de **frottements fluides faibles** (faible résistance de l'air) on observe un **régime pseudopériodique des oscillations**.
Dans ce cas leur amplitude diminue au cours du temps.



La **pseudopériode T** est la durée séparant deux passages consécutifs du pendule dans le même sens par la position d'équilibre stable.

Si **l'amortissement est très faible** on pourra écrire : $\mathbf{T \approx T_0}$

Si les frottements sont très importants le **régime apériodique** (il n'y a plus d'oscillations).



III. Étude du dispositif solide – ressort

Le dispositif solide – ressort est constitué d'un ressort dont une extrémité est fixe, l'autre extrémité étant reliée à un solide indéformable de masse ***m***.

On considèrera que les spires du ressort sont non jointives et que la masse du ressort est négligeable devant celle du solide.

III.1. Force de rappel exercée par un ressort

On écarte le ressort de sa position de repos (équilibre stable), celui-ci se déforme et exerce sur le solide une force appelée **force de rappel** notée $\vec{F}$.

La force de rappel d'un ressort sur un solide en translation s'écrit :

$$\vec{F} = -k \cdot \overrightarrow{G_0G} = -k \cdot x \cdot \vec{i}$$

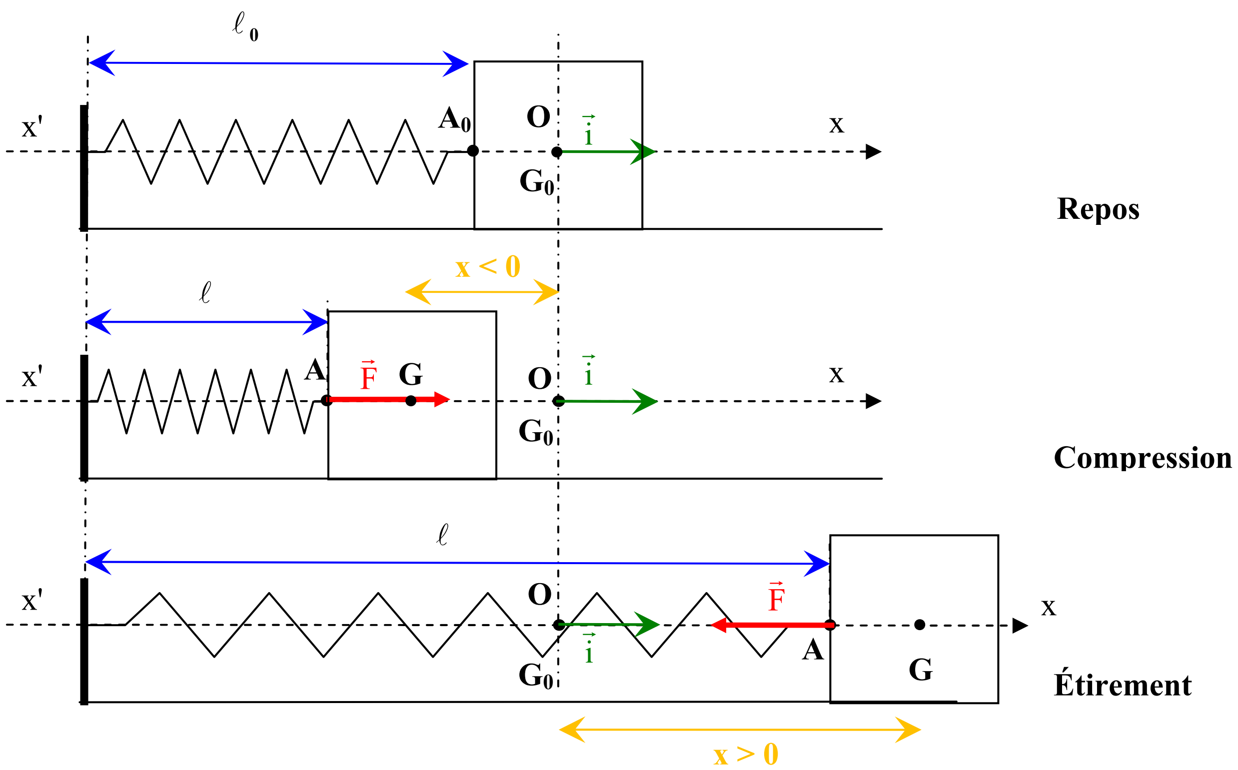
quelque soit l'orientation de l'axe Ox et que le ressort soit étiré ou comprimé.

Les caractéristiques de la force de rappel sont les suivantes :

- point d'application : point de contact entre le ressort et le solide
- direction : identique à celle de l'axe du ressort
- sens : celui qui tend à ramener le ressort dans sa position d'équilibre stable
- norme :

$\mathbf{F = k \cdot \lvert x \rvert}$ ou $\mathbf{F = k \cdot \lvert \ell - \ell_0 \rvert}$ ou $\mathbf{F = k \cdot \lvert \Delta\ell \rvert}$	**F** : en **N**, force de rappel du ressort **k** : en $\boldsymbol{N \cdot m^{-1}}$, constante de raideur du ressort **x** : en ***m***, allongement du ressort ℓ_0 : en ***m***, longueur du ressort au repos (non déformé) ℓ : en ***m***, longueur du ressort à la date t quelconque $\Delta\ell$: en ***m***, allongement du ressort

Attention : L'allongement x est une **grandeur algébrique** (valeurs positives et /ou négatives).

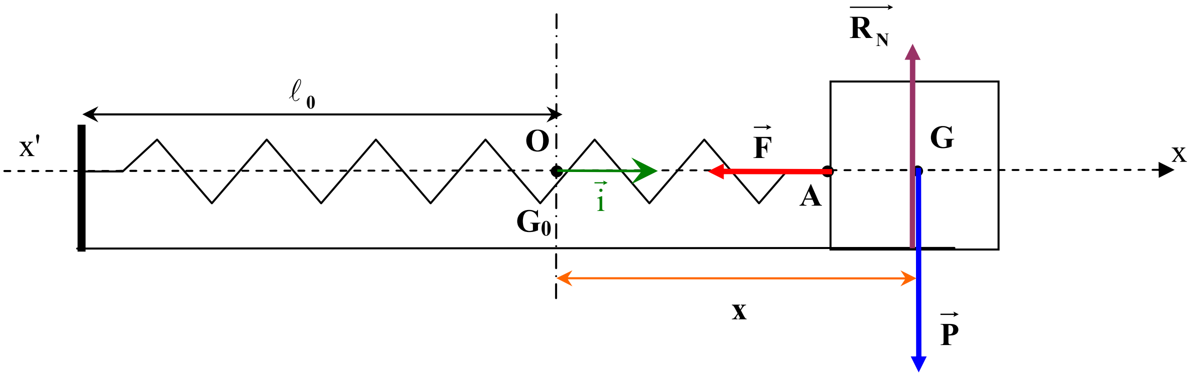


III.2. Équation différentielle du mouvement en absence de frottements

On étudie le mouvement du solide attaché à un ressort, les frottements solides et fluides sont négligés.

Système : {solide} — Référentiel d'étude : terrestre supposé galiléen lié au laboratoire

Bilan des forces extérieures :
- poids $\vec{P}$
- Réaction normale du support : $\overrightarrow{R_N}$
- Force de rappel exercée par le ressort : $\vec{F}$



D'après la deuxième loi de Newton on a : $\vec{F} + \overrightarrow{R_N} + \vec{P} = m \cdot \overrightarrow{a_G}$

En projetant la deuxième loi de Newton selon le vecteur unitaire $\vec{i}$ on aura :

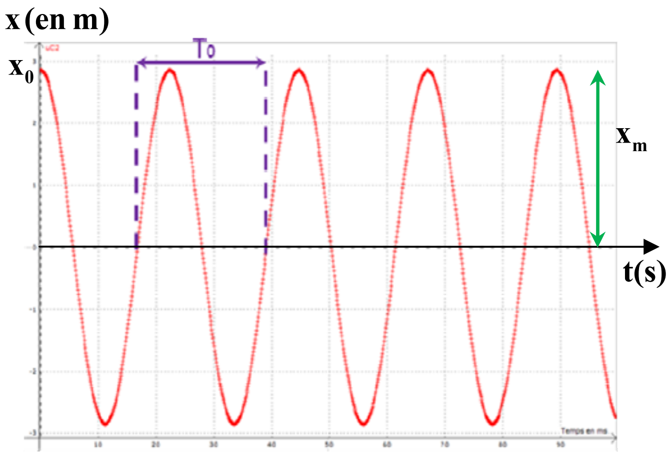
$$-k\cdot x\cdot\vec{i}=m\cdot\frac{dv_x}{dt}\cdot\vec{i}=m\cdot\frac{d^2x}{dt^2}\cdot\vec{i}$$

Ce qui conduit à l'équation différentielle vérifiée par l'allongement **x** :

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}\cdot x=0}$$

III.3. Solution de l'équation différentielle

La représentation graphique de **x** = f(t) est la suivante :



La solution générale de cette équation différentielle est du type :

$x(t)=x_m\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}\cdot t+\phi\right)$	**x(t)** : en ***m***, allongement du ressort x_m : en ***m***, amplitude des oscillations, **valeur toujours > 0** T_0 : en ***s***, période propre des oscillations φ : en ***rad***, phase à l'origine des dates avec $-\pi\le\varphi\le+\pi$

Les valeurs de x_m et de φ se déduisent des conditions initiales.

Détermination de l'expression de la période propre des oscillations T_0 :

Remplaçons l'expression de **x(t)** dans l'équation différentielle :

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{2\pi}{T_0}\cdot x_m\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}\cdot t+\varphi\right)$$

Donc
$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{4\pi^2}{T_0^{\,2}}\cdot x_m\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}\cdot t+\varphi\right)$$

Ainsi on a :

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}\cdot x=-\frac{4\pi^2}{T_0^{\,2}}\cdot x_m\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}\cdot t+\varphi\right)+\frac{k}{m}\cdot x_m\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}\cdot t+\varphi\right)$$

$$=x_m\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}\cdot t+\varphi\right)\times\left[\frac{k}{m}-\frac{4\pi^2}{T_0^{\,2}}\right]=0$$

Ce qui donne
$$\left[\frac{k}{m}-\frac{4\pi^2}{T_0^{\,2}}\right]=0$$

Donc $\frac{k}{m}=\frac{4\pi^2}{T_0^{\,2}}$ d'où $T_0^{\,2}=4\pi^2\cdot\frac{m}{k}$

$\mathbf{T_0} = 2\pi \cdot \sqrt{\dfrac{\mathbf{m}}{\mathbf{k}}}$	$\mathbf{T_0}$: en ***s***, période propre des oscillations **m** : en ***kg***, masse du solide **k** : en $\boldsymbol{N{\cdot}m^{-1}}$, constante de raideur du ressort

Équation aux dimensions de la période propre T_0 :

Comme $F = k \cdot |x|$ alors $[k] = \dfrac{[F]}{[L]}$

D'après la deuxième loi de Newton $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m \cdot \vec{a}$ on en déduit : $[F] = [M] \times \dfrac{[L]}{[T]^2}$

Donc : $$[k] = \frac{[M] \times \dfrac{[L]}{[T]^2}}{[L]} = \frac{[M]}{[T]^2}$$

D'où : $$\left[\frac{m}{k}\right] = [M] \times \frac{[T]^2}{[M]} = [T]^2$$

Soit : $$[T_0] = [2\pi] \times \sqrt{\left[\frac{m}{k}\right]} = 1 \times \sqrt{[T]^2} = [T]$$

Détermination de l'expression de $\mathbf{x_m}$ et de φ :

En considérant qu'à t = 0 s (juste au moment où on lâche le solide) on a :

$$\mathbf{x(t=0) = x_0 > 0} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{v(t=0) = 0\ m{\cdot}s^{-1}}$$

On a :

- $\mathbf{x(0) = x_m \cdot \cos(\varphi) = x_0}$ comme $\mathbf{x_m > 0}$ et $\mathbf{x_0 > 0}$ alors $\mathbf{\cos(\phi) > 0}$
- $\mathbf{v(0) = 0} = \left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=0} = -\dfrac{\mathbf{2\pi}}{\mathbf{T_0}} \cdot \mathbf{x_m \cdot \sin(\varphi)}$ soit $\varphi = \mathbf{0}$ ou $\boldsymbol{\pi}$ rad

Il en découle que $\boxed{\varphi = \mathbf{0\ rad}}$ et $\boxed{\mathbf{x_m = x_0}}$

La solution de l'équation différentielle du mouvement est donc :

$$\boxed{\mathbf{x(t) = x_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t\right)}}$$

Le mouvement du solide est donc un **mouvement périodique sinusoïdal de période propre T_0** lorsqu'on néglige les frottements. La **période propre T_0 est indépendante de l'amplitude x_m des oscillations.**

III.4. En présence de frottements

Dans le cas où il y a des frottements on aura des oscillations amorties comme le cas du pendule ou les circuits R,L,C.

Si les frottements sont suffisamment faibles on aura donc aussi un **régime pseudopériodique** et on pourra aura : $\mathbf{T \approx T_0}$. Si les frottements sont importants on aura donc aussi un **régime apériodique et il n'y aura plus d'oscillations.**

IV. Qu'est-ce que le phénomène de résonance ?

IV.1. Oscillations forcées

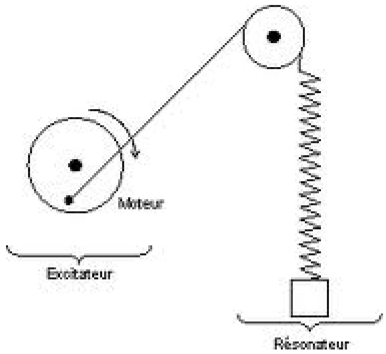
Lorsqu'on relie un **dispositif extérieur animé d'un mouvement sinusoïdale de période T_e** (ou de fréquence f_e) à un système oscillant de **période propre T_0** (ou de fréquence propre f_0) ce dernier va se mettre à **osciller à la même période T_e** (ou même fréquence f_e).

Le **dispositif extérieur** est appelé l'**excitateur** et l'**oscillateur** sera appelé le **résonateur**.

Le **résonateur oscille avec la même période (ou même fréquence) que l'excitateur** :

$$T_{\text{résonateur}} = T_e \quad \text{et} \quad f_{\text{résonateur}} = f_e$$

Dans ce cas on parle **d'oscillations forcées** du résonateur.

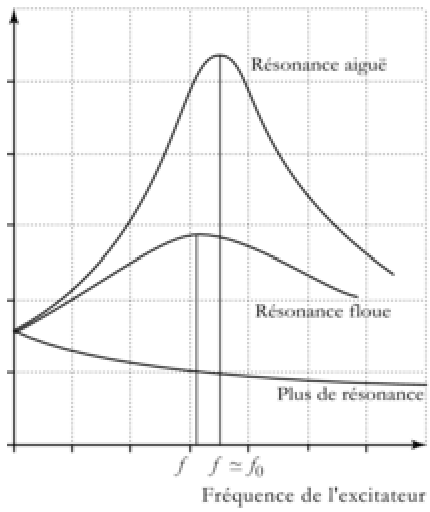


IV.2. Le phénomène de résonance

L'amplitude des oscillations du résonateur x_m dépend de la période de l'excitateur T_e.

À la résonance l'amplitude des oscillations du résonateur est maximale et la période T_e des oscillations **est égale à la période propre du résonateur T_0** :

$$T_0 = T_e \quad \text{et} \quad (f_e = f_0)$$



Lorsque **l'amortissement du résonateur est faible**, l'amplitude des oscillations est maximale : la **résonance** est dite **aigüe** et **T_e est voisin de T_0 :**

$$T_0 \approx T_e \quad \text{et} \quad (f_e \approx f_0)$$

Lorsque **l'amortissement du résonateur est plus important**, **l'amplitude des oscillations est faible**, la période de résonance s'écarte de la période propre de l'oscillateur, la **résonance** est dite **floue**.

Lorsque **l'amortissement du résonateur est très fort, il n'y a plus de résonance** !

IV.3. Exemples

- Un adulte (l'excitateur de période T_e) pousse régulièrement un enfant sur une balançoire (résonateur de période propre T_0) à une fréquence telle que $f_e \cong f_0$.
  On obtient alors des oscillations de grande amplitude et donc une résonance aigüe.

- Lorsqu'un véhicule roule sur un revêtement présentant une succession d'irrégularités, ces dernières engendrent des oscillations des suspensions. Pour limiter l'amplitude de ces oscillations forcées, le système doit être fortement amorti : c'est le rôle des amortisseurs qui doivent conduire à une résonance la plus floue possible.

- Un autre exemple de résonance floue concerne les immeubles ou les barrages construits dans les régions sismiques : ils doivent être conçus de manière à éviter les résonances avec les vibrations éventuelles du sol.