Chapitre 1 : Le dipôle (R,C)

Objectifs :

- *Connaître la représentation symbolique d'un condensateur ;*
- *En utilisant la convention récepteur, savoir orienter les différentes flèches-tension, noter les charges des armatures du condensateur ;*
- *Connaître les relations charge-intensité et charge-tension pour un condensateur en convention récepteur ; connaître la signification de chacun des termes et leur unité.*
- *Savoir exploiter la relation $q = C \cdot U$*
- *Effectuer la résolution analytique pour la tension aux bornes du condensateur ou la charge de celui-ci lorsque le dipôle RC est soumis à un échelon de tension. En déduire l'expression de l'intensité dans le circuit ;*
- *Connaître l'expression de la constante de temps et savoir vérifier son unité par analyse dimensionnelle ;*
- *Connaître l'expression de l'énergie emmagasinée dans un condensateur ;*
- *Savoir que la tension aux bornes d'un condensateur n'est jamais discontinue.*
- *Savoir exploiter un document expérimental pour :*
  - *Identifier les tensions observées,*
  - *Montrer l'influence de R et de C sur la charge ou la décharge,*
  - *Déterminer une constante de temps lors de la charge et de la décharge.*

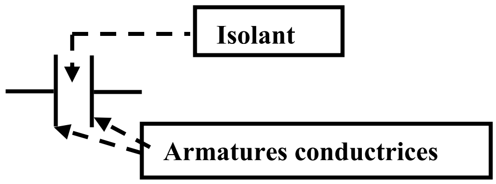
I. Qu'est-ce qu'un condensateur, comment se comporte-t-il dans un circuit ?

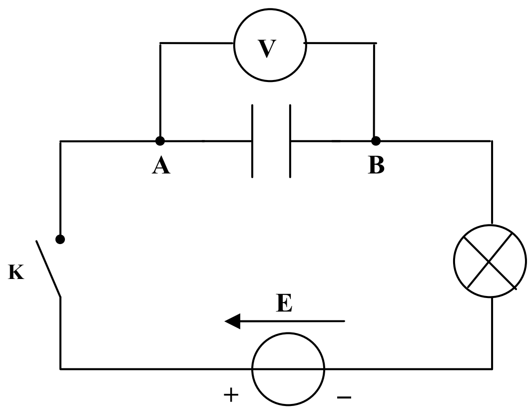
I.1. Description, symbole et charges électriques des armatures

Un condensateur est un composant électrique constitué de deux armatures métalliques (conducteurs) séparés par un isolant appelé diélectrique (ex : air, mica (silicate d'aluminium et de potassium)…).

On les trouve dans le flash des appareils photos, les stimulateurs cardiaques, les mémoires RAM des ordinateurs…)

Son symbole électrique est :





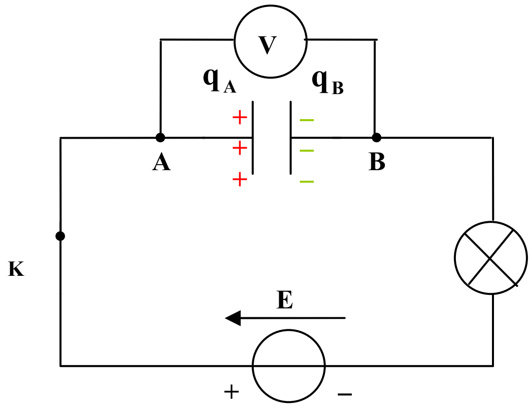
- Lorsqu'on ferme l'interrupteur K, la lampe s'éclaire puis s'éteint progressivement ;
- Le voltmètre indique une tension aux bornes du condensateur même après que la lampe se soit éteinte.

Interprétation :

Des électrons se sont déplacés dans le circuit et il s'est donc établi un **courant transitoire**.
Au niveau de l'armature B, il y a accumulation de charges négatives : les électrons.
Au niveau de l'armature A, des électrons sont arrachés parle générateur et cette armature se charge positivement (défaut d'électrons).
Cette accumulation de charges électriques opposées sur les armatures explique l'apparition d'une tension électrique aux bornes du condensateur

Nous admettrons qu'à chaque instant on a la relation suivante :

$q_A = - q_B$	q_A , en C, charge électrique de l'armature A q_B , en C, charge électrique de l'armature B



On a toujours une charge globale :

$\boxed{Q = q_A + q_B = 0 \text{ C}}$

Un condensateur, branché à un générateur de tension continue, accumule sur ses armatures des charges électriques de même valeur mais de signes opposés. C'est le phénomène de « **charge du condensateur** ».

I.2. Charge électrique et intensité du courant

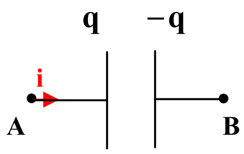
Par définition, l'intensité d'un courant électrique correspond au nombre de charges électriques qui traverse une section de conducteur par unité de temps.

On considère un **courant constant I** qui débite, sur l'armature A d'un condensateur, une charge $\Delta q_A = q_A(t) - q_A(t_0)$ pendant une durée $\Delta t = t - t_0$, on a donc la relation : $I = \dfrac{\Delta q_A}{\Delta t}$.

L'intensité du courant à l'instant t_0 peut s'écrire : $i(t) = \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{q_A(t) - q_A(t_0)}{t - t_0} = \left.\dfrac{dq_A}{dt}\right|_{t=t_0}$

Soit pour un instant **t** : $i(t) = \dfrac{dq_A(t)}{dt}$.

Pour une orientation du courant suivante (la flèche du courant arrive sur l'armature portant la charge + q) on peut écrire que :



$i(t) = \dfrac{dq(t)}{dt}$	**i(t)**, en *A*, intensité du courant **q(t)**, en *C*, charge électrique **t**, en *s*, temps

- Si **i(t) > 0** (le courant circule effectivement dans ce sens), alors $\dfrac{dq(t)}{dt} > 0$ le **condensateur se charge** $(q(t)\uparrow)$
- Si **i(t) < 0**, alors $\dfrac{dq(t)}{dt} < 0$ le **condensateur se décharge** $(q(t)\downarrow)$

I.3. La capacité du condensateur

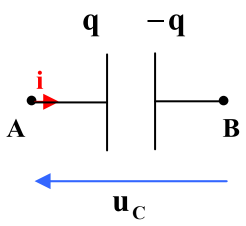
La charge électrique *q* portée par une armature d'un condensateur est proportionnelle à la tension u_C entre ses bornes.

Le coefficient de proportionnalité est une grandeur caractéristique du composant appelée **capacité du condensateur**.

On la **note C** et elle s'exprime en **Farad (F). C'est une grandeur qui est positive.**

Les capacités des condensateurs usuels sont plutôt des sous-multiples du Farad : mF, µF, nF et pF.

En **convention récepteur (u_C et i de sens opposés)**, on a la relation suivante :



$\mathbf{q(t) = C \cdot u_C(t)}$	**q(t)**, en *C*, charge électrique **C**, en *F*, capacité du condensateur $\mathbf{u_C(t)}$, en *V*, tension aux bornes du condensateur

I.4. Relation intensité – tension

Sachant que $\mathbf{i(t) = \frac{dq(t)}{dt}}$ et que $\mathbf{q(t) = C \cdot u_C(t)}$, on en déduit la relation suivante : $\mathbf{i(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt}}$

II. Quelle est la réponse d'un dipôle (R,C) à un échelon de tension ?

L'association en série d'un condensateur de capacité C et d'une résistance R constitue un dipôle (R,C)

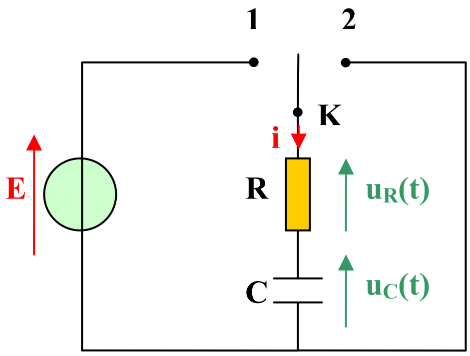
II.1. Notion d'échelon de tension **Figure 8 p 115**

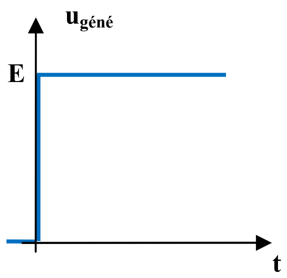
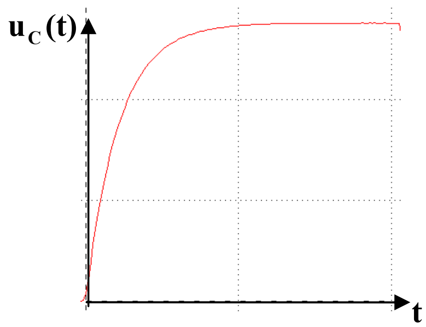
Lorsque la tension aux bornes du dipôle (R,C) passe brusquement de 0 à une valeur constante E ou inversement, on dit que le dipôle est soumis à un échelon de tension (montant ou descendant).

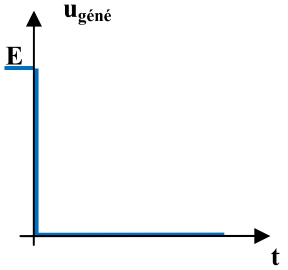
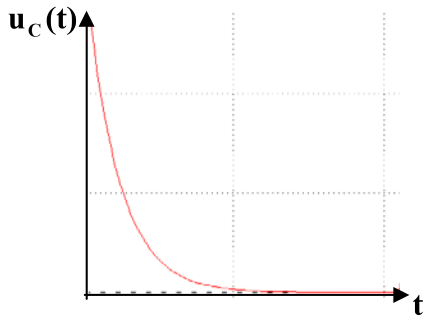
La réponse du dipôle (R,C) à un échelon de tension correspond à l'évolution

II.2. Résultats expérimentaux **Voir TP N°5 de Physique**

Montage électrique : le condensateur est initialement déchargé, l'interrupteur est basculé en position 1



Réponse à un échelon de tension montant	 **K en position 1**	 **Charge du condensateur**

Réponse à un échelon de tension descendant	 **K en position2**	 **Décharge du condensateur**

La phase durant laquelle la tension $\mathbf{u_C(t)}$ **varie** est appelée **régime transitoire.** Lorsque la tension $\mathbf{u_C(t)}$ **est constante** on dit qu'on est en **régime permanent**

II.3. Constante de temps

• Pour R et C fixes, lorsqu'on change la valeur de E, on remarque que la durée de charge du condensateur ne change pas ; • Pour E et C fixes, lorsqu'on augmente R, la durée de charge du condensateur augmente ; • Pour E et R fixes, lorsqu'on augmente C, la durée de charge du condensateur augmente.

On appelle τ **la constante de temps du dipôle (R,C)**, elle a pour expression :

$\boldsymbol{\tau = R \cdot C}$	**τ**, en *s*, constante de temps du dipôle (R,C) **C**, en *F*, capacité du condensateur **R**, en *Ω*, résistance du conducteur ohmique

Effectuons une analyse dimensionnelle du produit « $\mathbf{R \cdot C}$ » : $[\boldsymbol{\tau}] = [\mathbf{R}] \times [\mathbf{C}]$

D'après la loi d'ohm on a $[\mathbf{R}] = \dfrac{[\mathbf{U}]}{[\mathbf{I}]}$

De plus d'après la relation $\mathbf{q(t) = C \cdot u_C(t)}$ on a $[\mathbf{C}] = \dfrac{[\mathbf{q}]}{[\mathbf{U}]}$

Comme $\mathbf{i(t)} = \dfrac{\mathbf{d\,q(t)}}{\mathbf{d\,t}}$ alors $[\mathbf{q}] = [\mathbf{I}] \times [\mathbf{T}]$ ainsi on a $[\mathbf{C}] = \dfrac{[\mathbf{I}] \times [\mathbf{T}]}{[\mathbf{U}]}$

Donc $$\boxed{[\boldsymbol{\tau}] = \frac{[\mathbf{U}]}{[\mathbf{I}]} \times \frac{[\mathbf{I}] \times [\mathbf{T}]}{[\mathbf{U}]} = [\mathbf{T}]}$$

Le calcul de τ nous renseigne sur la durée de charge (ou de décharge) du condensateur dans un dipôle (R,C). τ donne une idée de la durée du régime transitoire.

Lors de la charge du condensateur pour une durée de $\boldsymbol{\tau}$, la tension $\mathbf{u_C(\boldsymbol{\tau}) = 0{,}63 \cdot E}$; Pour une durée de $\mathbf{5 \cdot \boldsymbol{\tau}}$, on a $\mathbf{u_C(5 \cdot \boldsymbol{\tau}) \cong 0{,}99 \cdot E}$.

II.4. Étude de la charge du condensateur **L'interrupteur K est en position 1**

Appliquons la loi des mailles : $\mathbf{E = u_R(t) + u_C(t)}$,

D'après la loi d'Ohm : $u_R(t) = R \cdot i(t)$ et $i(t) = \dfrac{dq(t)}{dt} = C \cdot \dfrac{du_C(t)}{dt}$ car $q(t) = C{\cdot}u_C(t)$

d'où $$\mathbf{u_R(t) = R \cdot C \cdot \frac{du_C(t)}{dt}}$$

On obtient ainsi l'équation différentielle vérifiée par la tension $\mathbf{u_C(t)}$:

$$\boxed{\mathbf{E = R \cdot C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t)}} \quad \text{ou encore} \quad \boxed{\mathbf{\frac{E}{R \cdot C} = \frac{du_C(t)}{dt} + \frac{u_C(t)}{R \cdot C}}}$$

La solution de cette équation différentielle est du type :

$\boxed{\mathbf{u_C(t) = A} \cdot (1 - \mathbf{e}^{-\alpha \cdot t})}$ où **A** et **α** sont des **constantes > 0**.

Déterminationdes constantes **A** et **α** :

- Pour déterminer **A on utilise la condition à l'infini** (**en régime permanent**) :

  on a $\mathbf{u_C(\infty) = E}$ et $\mathbf{u_C(\infty) = A}$ car $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-\alpha \times t} = 0$ soit $\boxed{\mathbf{A = E}}$

- En dérivant $\mathbf{u_C(t)}$ par rapport au temps on obtient : $\mathbf{\dfrac{du_C(t)}{dt}} = \dfrac{d\left(A - A \times e^{-\alpha \times t}\right)}{dt} = \mathbf{A \cdot \alpha \cdot e^{-\alpha \cdot t}}$;

  Remplaçons dans l'équation différentielle :

$$\mathbf{\frac{E}{R \cdot C}} = A \cdot \alpha \cdot e^{-\alpha \cdot t} + \cdot \frac{A \cdot (1 - e^{-\alpha \cdot t})}{R \cdot C} = \mathbf{A \cdot e^{-\alpha \cdot t}\left(\alpha - \frac{1}{R \cdot C}\right) + \frac{A}{R \cdot C}}$$

  Il faut donc que le terme $\mathbf{\left(\alpha - \dfrac{1}{R \cdot C}\right) = 0}$ car le membre de gauche est constant

  d'où : $$\boxed{\mathbf{\alpha = \frac{1}{R \cdot C} = \frac{1}{\tau}}}$$

  On a donc l'expression : $\mathbf{u_C(t) = -E \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} + E}$ ou encore

$$\boxed{\mathbf{u_C(t) = E \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{R \cdot C}}\right)}} \text{ ou } \boxed{\mathbf{u_C(t) = E \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}}$$

La tension $\mathbf{u_C(t)}$ tend donc vers **une valeur limite en régime permanent** : la tension du générateur **E**.

Expression de la charge **q(t)** du condensateur :

Sachant que $\mathbf{q(t) = C \cdot u_C(t)}$ donc en multipliant par **C** l'expression de $\mathbf{u_C(t)}$ et l'équation différentielle vérifiée par $\mathbf{u_C(t)}$ on en déduit :

$$\mathbf{\left(\frac{E}{R \cdot C} = \frac{du_C(t)}{dt} + \frac{u_C(t)}{R \cdot C}\right) \times C} \qquad \text{soit}$$

$$\boxed{\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{R}} = \frac{\mathbf{d\,q(t)}}{\mathbf{d\,t}} + \frac{\mathbf{q(t)}}{\mathbf{R\cdot C}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathbf{q(t) = C\cdot E\cdot\left(1 - e^{-\frac{t}{R\cdot C}}\right) = C\cdot E\cdot\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}}$$

<u>Expression de l'intensité du courant **i(t)** dans le circuit</u> :

On sait que $\mathbf{i(t)=\frac{d\,q(t)}{d\,t}}$, or $\mathbf{q(t) = E\cdot C\cdot(1 - e^{-\frac{t}{R\cdot C}})}$ donc $\boxed{\mathbf{i(t)} = \frac{d\,q(t)}{d\,t} = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{e}^{-\frac{t}{R\cdot C}}}$

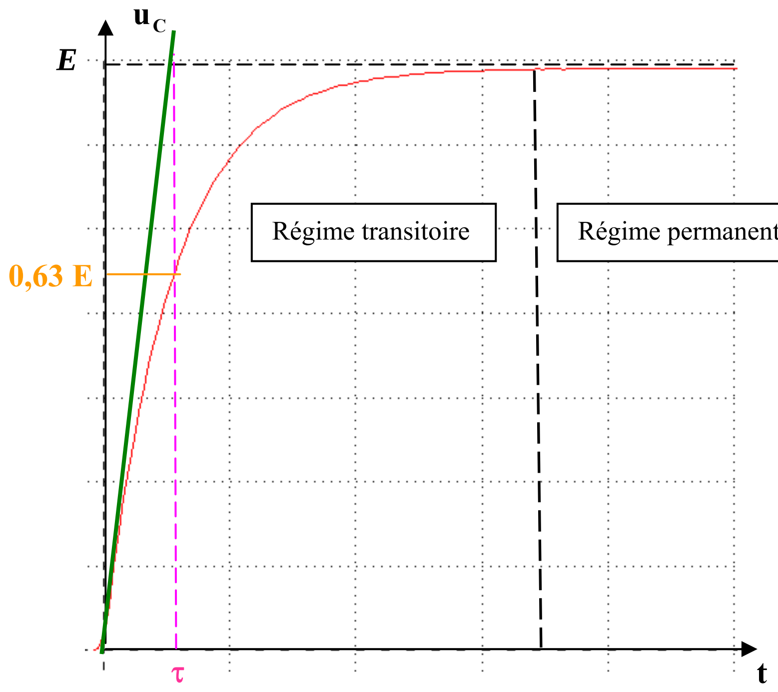
On peut également partir de l'expression de $\mathbf{u_C(t)}$ sachant que $i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C\cdot\frac{d\,u_C(t)}{d\,t}$

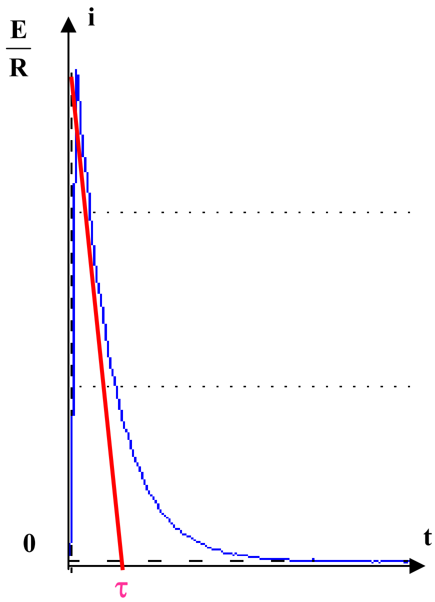
car $q(t) = C\cdot u_C(t)$ on calcule $\frac{\mathbf{du_C(t)}}{\mathbf{dt}}$: $\quad \frac{\mathbf{du_C(t)}}{\mathbf{dt}} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{R\cdot C}}\times\mathbf{E}\times\left(-\mathbf{e}^{-\frac{t}{R\cdot C}}\right)$

Et ainsi $\mathbf{i(t)} = C\cdot\frac{d\,u_C(t)}{d\,t} = \frac{E\cdot C}{R\cdot C}\times e^{-\frac{t}{R\cdot C}}$ soit $\boxed{\mathbf{i(t)} = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{R}}\times\mathbf{e}^{-\frac{t}{R\cdot C}} = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{R}}\times\mathbf{e}^{-\frac{t}{\tau}}}$

<u>Détermination graphique de τ lors de la charge du condensateur</u> :

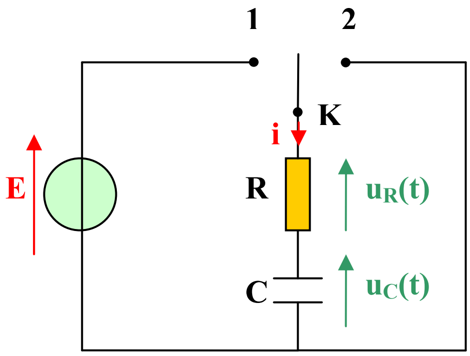
- On se place sur le graphique à $\mathbf{u_C(t) = 0{,}63\cdot E}$ et on lit le temps $\boldsymbol{\tau}$ correspondant ;
- Le point d'intersection entre la tangente à l'origine et l'asymptote d'équation $\mathbf{u_C = E}$ a pour abscisse $\mathbf{t = \boldsymbol{\tau}}$:





II.5. Étude de la décharge du condensateur l'interrupteur est basculé en position 2

Montage électrique : le condensateur est initialement chargé et on a $u_C(0) = E$



La loi des mailles donne : ……………………………….et l'équation différentielle vérifiée par $u_C(t)$ est :

La solution de cette équation différentielle est : $u_C(t) = A \cdot e^{-\alpha \times t}$ où **A** et **α** sont des **constantes > 0**.

Détermination des constantes **A** et **α** :

- Pour déterminer **A on utilise la condition initial à t = 0 s** (**condensateur initialement chargé sous la tension E**) :

  $u_C(0) = E$ et soit **A = ……………..**

- En dérivant $u_C(t)$ par rapport au temps on obtient : $\frac{d u_C(t)}{d t}$ = ... ;

  Remplaçons dans l'équation différentielle :

  Il faut donc que le terme ………………………..car le membre de gauche est nul d'où : **α** = ...

  On a donc l'expression : $u_C(t)$ = ...

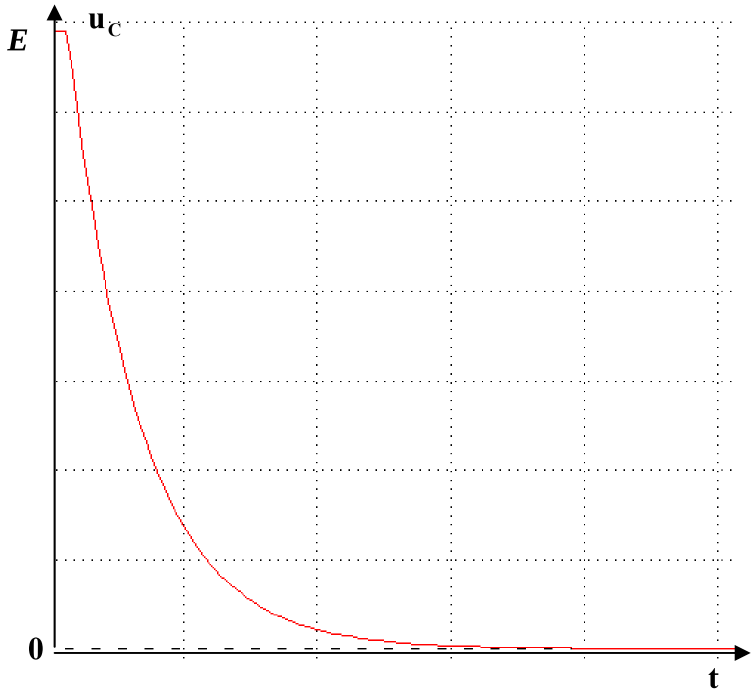
  et on a **q(t)** = ... et **i(t)** = ...

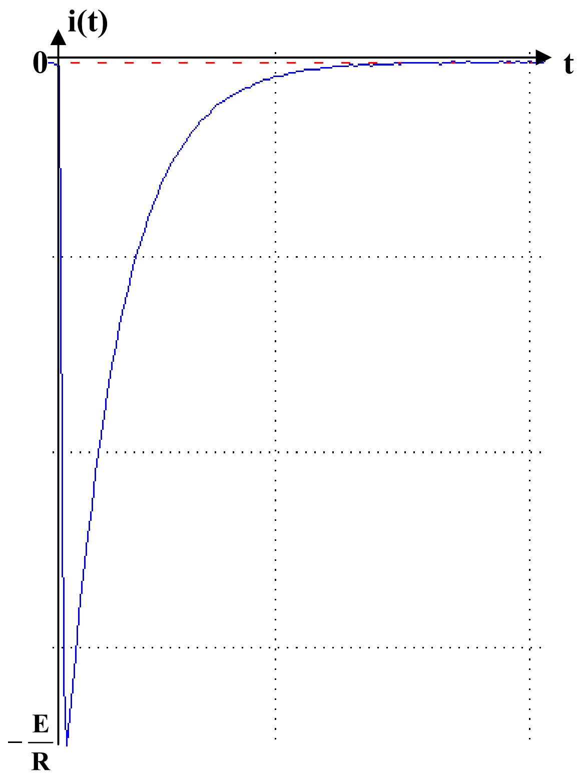
La tension $u_C(t)$ tend donc vers **une valeur limite en régime permanent qui vaut 0 V**

Lors de la décharge du condensateur pour une durée de **τ**, la tension ; $u_C(\tau) = 0,37 \cdot E$
Pour une durée de **5τ**, on a $u_C(5\tau) \cong 0,01 \cdot E$.

Détermination graphique de τ lors de la décharge du condensateur :

- On se place sur le graphique à $\mathbf{u_C(t) = 0{,}37 \cdot E}$ et on lit le temps $\boldsymbol{\tau}$ correspondant ;
- Le point d'intersection entre la tangente à l'origine et l'asymptote d'équation $\mathbf{u_C = 0}$ a pour abscisse $\mathbf{t = \tau}$:



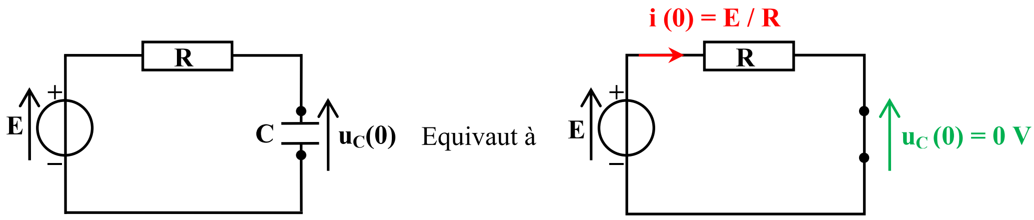


II.6. Circuits équivalents

a) Charge du condensateur

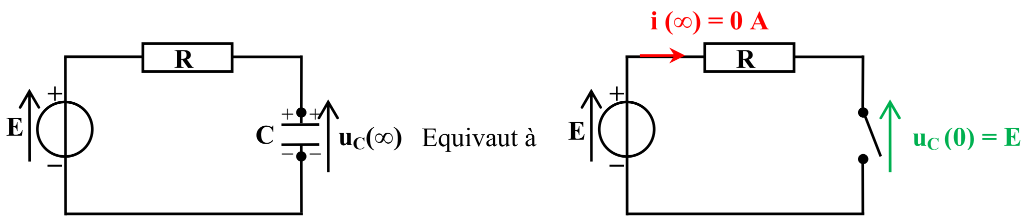
À t = 0 s, lors de sa charge, le condensateur se comporte comme un fil.

Le circuit équivalent est donc :



À t = ∞ (régime permanent), **lors de sa charge, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert.**

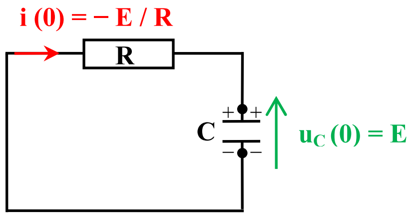
Le circuit équivalent est donc :



b) Décharge du condensateur

À t = 0 s, lors de sa décharge, la tension aux bornes du condensateur est continue et vaut $u_C(0) = E$.

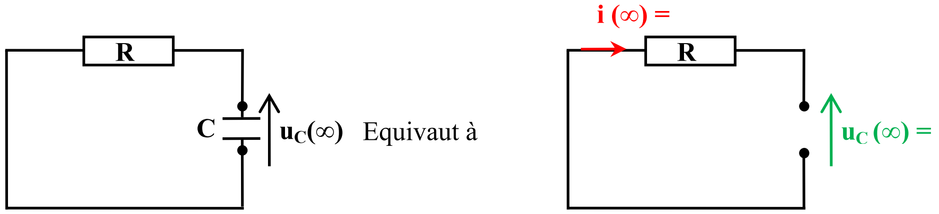
Le circuit équivalent est donc :



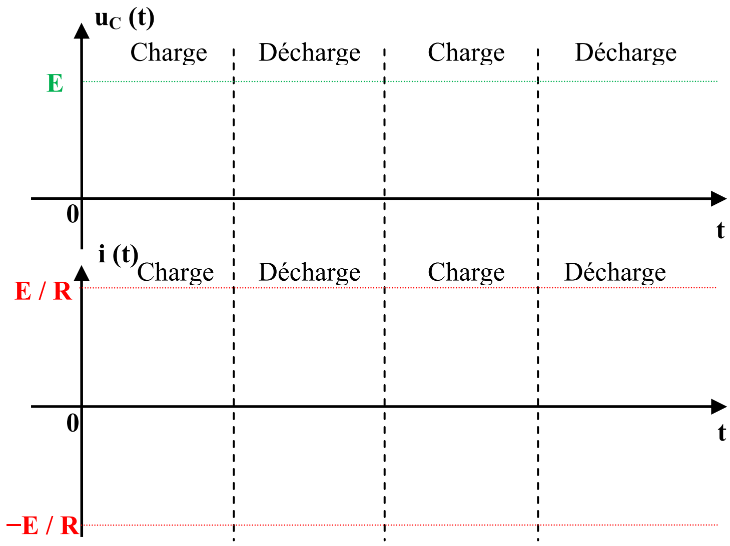
Le courant circule dans le sens opposé à celui indiqué sur le schéma

À t = ∞ (régime permanent), **lors de sa décharge, le condensateur se comporte comme un ………………... ……………………………………………….**

Le circuit équivalent est donc :



II.7. Graphiques bilans



III. Quelle est l'énergie stockée par un condensateur ?

III.1. Expression de l'énergie

L'expression de l'énergie emmagasinée par un condensateur de capacité C chargé sous une tension $u_C(t)$:

ou	$E_{cond}(t)$, en *J*, énergie emmagasinée par le condensateur **C**, en *F*, capacité du condensateur $u_C(t)$, en *V*, tension aux bornes du condensateur $q(t)$, en *C*, charge électrique du condensateur

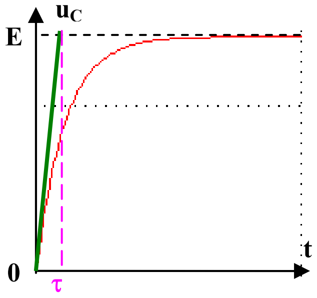
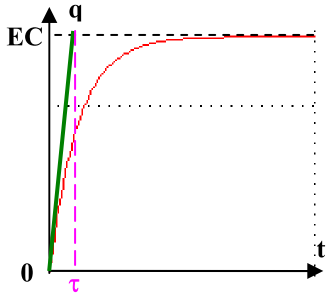
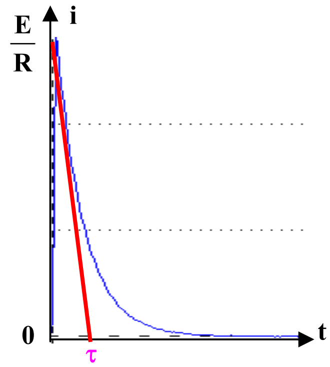
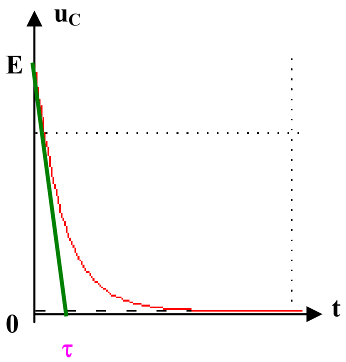
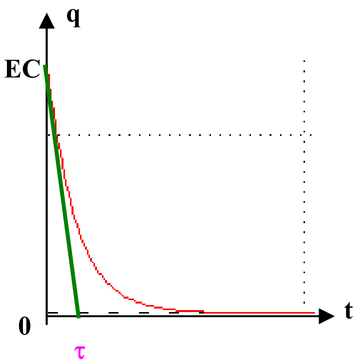
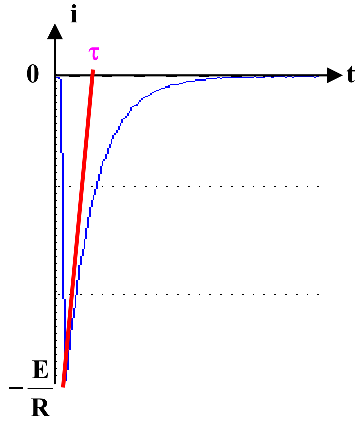
III.2. Conclusion

Le stockage et le déstockage de l'énergie du condensateur ne peut pas se faire instantanément sinon la puissance serait infinie (ce qui est physiquement impossible !) ; l'énergie stockée par le condensateur est forcément continue.

Or l'énergie est dépendante de la tension $u_C(t)$.

La tension $u_C(t)$ aux bornes d'un condensateur est ………………….. Ce n'est pas le cas de l'intensité $i(t)$.

IV. Bilan

	Tension $u_C(t)$	Charge $q(t)$	Intensité $i(t)$
Constante de temps : $\boxed{\tau = R \cdot C}$			
Charge du condensateur	 $\boxed{u_C(t) = E \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})}$	 $\boxed{q(t) = E \cdot C \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})}$	 $\boxed{i(t) = \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}}$
Décharge du condensateur	 $\boxed{u_C(t) = E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}}$	 $\boxed{q(t) = E \cdot C \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}}$	 $\boxed{i(t) = -\frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}}$