Corrigés des exercices sur le condensateur

Exercice 1

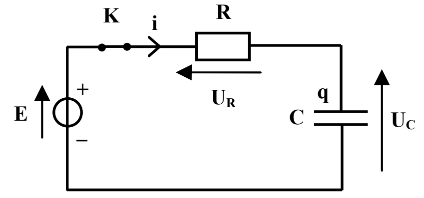


Figure 1

1.1. Voir schéma

1.2. D'après la loi d'Ohm on a : $\mathbf{u_R = R \cdot i(t)}$

1.3. On a $\mathbf{i(t) = \frac{dq}{dt}}$

1.4. La relation est : $\mathbf{q(t) = C \cdot u_C(t)}$

1.5. On en déduit donc que $\mathbf{i(t)} = \frac{dq}{dt} = \mathbf{C \cdot \frac{du_C(t)}{dt}}$

1.6. D'après la loi d'additivité des tensions on a : $\mathbf{E = u_R(t) + u_C(t)}$

1.7. L'équation différentielle (1) se déduit des relations précédentes, on a : $\mathbf{E = RC \cdot \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t)}$ ou encore

$$\mathbf{\frac{E}{RC} = \frac{du_C(t)}{dt} + \frac{u_C(t)}{RC}}$$

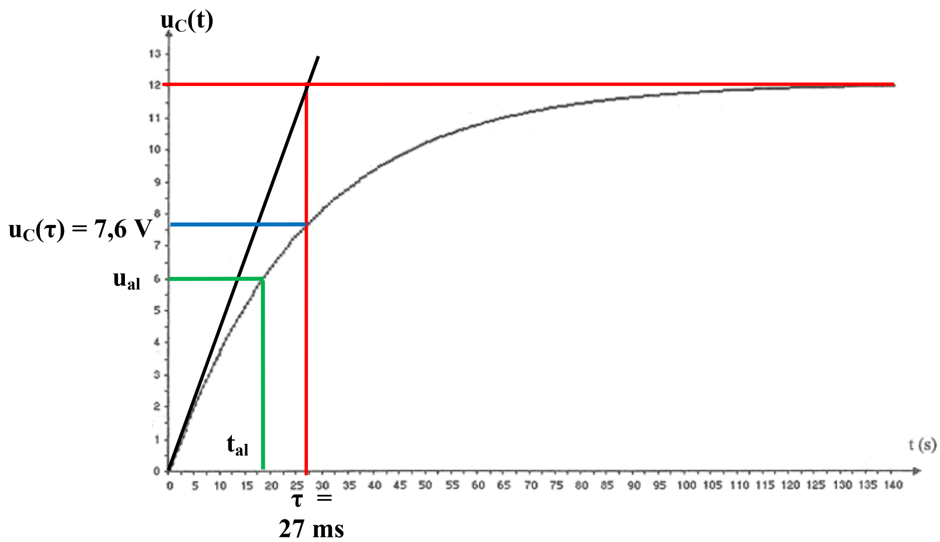
1.8.1. $\frac{du_C(t)}{dt} = E \times \left(-\frac{1}{\tau}\right) \times \left(-e^{-t/\tau}\right) = \frac{E}{\tau} \cdot e^{-t/\tau}$ donc $\frac{du_C(t)}{dt} + \frac{u_C(t)}{RC} = \frac{E}{\tau} \cdot e^{-t/\tau} + \frac{E}{RC} \cdot \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$

$\mathbf{\frac{du_C(t)}{dt} + \frac{u_C(t)}{RC}} = \frac{E}{RC} \cdot e^{-t/\tau} + \frac{E}{RC} \cdot \left(1 - e^{-t/\tau}\right) = \mathbf{\frac{E}{RC}}$ ainsi $u_C(t)$ est bien solution de l'équation (1).

1.8.2. Comme le condensateur est initialement déchargé alors à l'instant t = 0 on a $u_C(0) = 0{,}0$ V, lorsqu'on remplace la valeur de t par 0 s on a $\mathbf{u_C(0)} = E \cdot \left(1 - e^{-0/\tau}\right) = E \cdot (1 - 1) = \mathbf{0{,}0\,V}$. u_C respecte bien la condition initiale.

1.9.1. $[\tau] = [R] \times [C]$ or d'après la loi d'ohm on a $[R] = \frac{[U]}{[I]}$ de plus d'après la relation $q(t) = C \cdot u_C(t)$ on a $[C] = \frac{[q]}{[U]}$ et comme $i(t) = \frac{d\,q(t)}{d\,t}$ alors $[q] = [I] \times [T]$ ainsi on a $[C] = \frac{[I] \times [T]}{[U]}$ et donc $[\boldsymbol{\tau}] = \frac{[\mathbf{U}]}{[\mathbf{I}]} \times \frac{[\mathbf{I}] \times [\mathbf{T}]}{[\mathbf{U}]} = [\mathbf{T}]$

1.9.2. A l'instant t = τ, on a $\mathbf{u_C(\tau)} = E \cdot \left(1 - e^{-\tau/\tau}\right) = 12{,}0 \cdot \left(1 - e^{-1}\right) = \mathbf{7{,}59\,V}$: **cette méthode est à privilégiée devant la méthode de la tangente à l'origine car elle est plus précise.**



1.9.3. Sachant que $\tau = R \cdot C$ alors $\mathbf{R} = \frac{\boldsymbol{\tau}}{\mathbf{C}} = \frac{27 \cdot 10^{-3}}{120 \cdot 10^{-6}} = \mathbf{2{,}3 \cdot 10^5\,\Omega}$

2.1. Lorsqu'on appuie sur le bouton poussoir, la tension aux bornes du condensateur devient instantanément nulle (court – circuit) donc la **lumière va s'allumer** car $\mathbf{u_C = 0{,}0\,V < u_{al}}$.

2.2.1. La tension aux bornes du condensateur va augmenter progressivement, les armatures du condensateur déchargées au moment où on a appuyé sur le bouton, lorsqu'on le relâche, elles vont se recharger progressivement jusqu'à atteindre la tension E = 12,0 V.

2.2.2. Aussitôt après avoir relâché le bouton, la lampe ne s'éteindra pas instantanément car d'après la question 1.9.2.à $t = \tau$, $u_c(\tau) = 7,59$ V c'est un peu supérieur à la tension u_{al} donc la lampe va rester allumer un peu moins de 25 s.

2.2.3. On sait que lors de la charge des armatures du condensateur $u_c(t)$ a pour expression : $u_C(t) = E \cdot \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$ et comme la lampe reste allumer jusqu'à ce que $t < t_{al}$ et donc $u_C(t_{al}) = E \cdot \left(1 - e^{-t_{al}/\tau}\right) = u_{al}$:

$$E \cdot \left(1 - e^{-t_{al}/\tau}\right) = u_{al} \text{ donc } 1 - e^{-t_{al}/\tau} = \frac{u_{al}}{E}$$

$$\text{soit } 1 - \frac{u_{al}}{E} = e^{-t_{al}/\tau}$$

$$\ln\left(1 - \frac{u_{al}}{E}\right) = -\,{t_{al}}/{\tau} \quad \text{donc } \mathbf{t_{al} = -\tau \times \ln\left(1 - \frac{u_{al}}{E}\right)}$$

2.2.4. $\mathbf{t_{al}} = -25 \times \ln\left(1 - \dfrac{6,0}{12,0}\right) = \mathbf{17\,s}$

2.2.5. Voir schéma plus haut. Sur le schéma on trouve $\mathbf{t_{al} = 18\ s}$ ce qui est cohérent avec la valeur théorique.

2.3. Il faudrait augmenter la valeur de la constante de temps τ donc il faut **augmenter la valeur de R et/ou celle de C**.

Exercice 2

1.1. On sait que $i(t) = \dfrac{dq}{dt}$ or l'intensité du courant est constante donc $\mathbf{I = \dfrac{q(t)}{\Delta t}}$ donc $q(t) = I \times \Delta t$ soit à $t = 3,0$s on a $\mathbf{q(3,0)} = 12\cdot10^{-6} \times 3,0 = \mathbf{36\cdot10^{-6}\ C}$.

1.2. Par définition on a $q(t) = C \cdot u_C(t)$ où C est la capacité du condensateur qui est constante donc le coefficient directeur de la courbe $q = f(u_C)$ correspond à la capacité C du condensateur : $C = \dfrac{q(8) - q(0)}{8,0 - 0,0} = \dfrac{37\cdot10^{-6}}{4,0}$ soit $\mathbf{C = 4,6\cdot10^{-6}\ F = 4,6\ \mu F}$.

1.3. $4,7 - 4,7\times10\%\ \mu F < C < 4,7 + 4,7\times10\%\ \mu F$ donc $4,7 - 0,47\ \mu F < C < 4,7 + 0,47\ \mu F$ soit $\mathbf{4,2\ \mu F < C < 5,2\ \mu F}$, donc la valeur obtenue est en accord avec la tolérance du constructeur.

2.1. On se place en convention récepteur (u et i sont de sens opposés) :

d'après la loi d'Ohm on a : $u_R = R\cdot i(t)$, or $i(t) = \dfrac{dq}{dt}$ et comme $q(t) = C \cdot u_C(t)$ donc $i(t) = \dfrac{dq}{dt} = C \cdot \dfrac{du_C(t)}{dt}$

d'après la loi d'additivité des tensions on a : $E = u_R(t) + u_C(t)$ donc $\mathbf{E = RC \cdot \dfrac{du_C(t)}{dt} + u_C(t)}$

2.2. L'expression de u_C est solution de l'équation différentielle donc $\dfrac{du_C(t)}{dt} = A \times (-\alpha) \times \left(-e^{-\alpha\cdot t}\right) = A \cdot \alpha \cdot e^{-\alpha\cdot t}$ et donc $RC \cdot \dfrac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = RC \cdot A \cdot \alpha \cdot e^{-\alpha\cdot t} + A \cdot \left(1 - e^{-\alpha\cdot t}\right) = E$ en factorisant et en séparant les termes qui dépendent du temps on obtient : $A \cdot e^{-\alpha\cdot t} \cdot (RC \cdot \alpha - 1) + A = E$ or E est un terme constant donc il faut que le terme qui dépend du temps soit nul autrement dit : $RC \cdot \alpha - 1 = 0$ d'où $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{\dfrac{1}{RC}}$.

Or lorsqu'on est en régime permanent ($t \to \infty$), $u_C(\infty) = E = A\cdot(1 - 0)$ donc **A = E** donc $\mathbf{u_C(t) = E \cdot \left(1 - e^{-t/RC}\right)}$

2.3. Graphiquement l'asymptote horizontale a pour équation $u_C = E$, ainsi on lit **E = 5,0 V**.

2.4. a) D'après l'équation différentielle on a $E = RC \cdot \dfrac{du_C(t)}{dt} + u_C(t)$ donc $RC \cdot \dfrac{du_C(t)}{dt} = E - u_C(t)$ d'où

$$\mathbf{\frac{du_C(t)}{dt} = \frac{E - u_C(t)}{RC}} \text{ ainsi on a } \left(\mathbf{\frac{du_C}{dt}}\right)_{\mathbf{0}} = \frac{E - u_C(0)}{RC} = \frac{5,0 - 0,0}{2,2\cdot10^3 \times 4,7\cdot10^{-6}} = \mathbf{4,8\cdot10^2\ V\cdot s^{-1}}$$

b)

t (ms)	0	1	2	3
u_C (t) (V)	0	**0,48**	**0,92**	**1,3**
$\frac{du_C}{dt}$ $(V.s^{-1})$	$\mathbf{4,8.10^2}$	$\mathbf{4,4.10^2}$	$\mathbf{3,9.10^2}$	$\mathbf{3,6.10^2}$

$$u_C(0+1) = \mathbf{u_C(1)} = u_C(0) + \left(\frac{du_C}{dt}\right)_0 \times \Delta t = 4,8.10^2 \times 1.10^{-3} = \mathbf{0,48\ V}$$

$$\left(\frac{\mathbf{du_C}}{\mathbf{dt}}\right)_1 = \frac{E - u_C(1)}{R.C} = \frac{5,0 - 0,48}{2,2.10^3 \times 4,7.10^{-6}} = \mathbf{4,4.10^2\ V\cdot s^{-1}}$$

$$\mathbf{u_C(2)} = u_C(1) + \left(\frac{du_C}{dt}\right)_1 \times \Delta t = 0,48 + 4,4.10^2 \times 1.10^{-3} = \mathbf{0,92\ V}$$

$$\left(\frac{\mathbf{du_C}}{\mathbf{dt}}\right)_2 = \frac{E - u_C(2)}{R.C} = \frac{5,0 - 0,92}{2,2.10^3 \times 4,7.10^{-6}} = \mathbf{3,9.10^2\ V\cdot s^{-1}}$$

$$\mathbf{u_C(3)} = u_C(2) + \left(\frac{du_C}{dt}\right)_2 \times \Delta t = 0,92 + 3,9.10^2 \times 1.10^{-3} = \mathbf{1,3\ V}$$

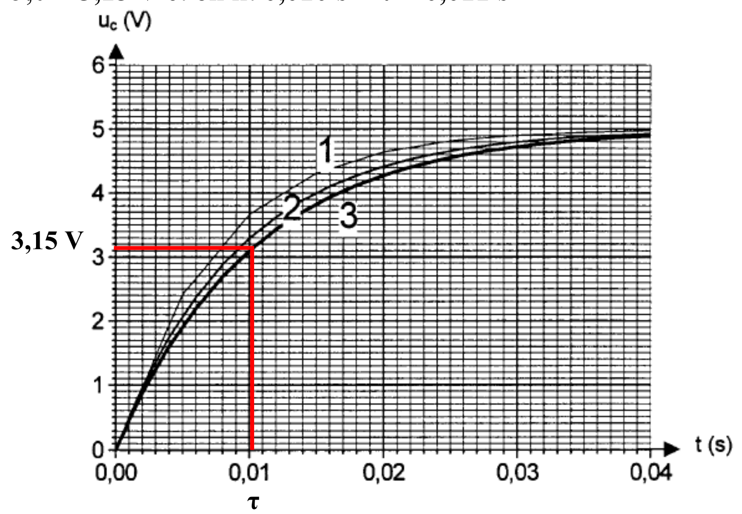
$$\left(\frac{\mathbf{du_C}}{\mathbf{dt}}\right)_3 = \frac{E - u_C(3)}{R.C} = \frac{5,0 - 1,3}{2,2.10^3 \times 4,7.10^{-6}} = \mathbf{3,6.10^2\ V\cdot s^{-1}}$$

2.5.a. Plus le pas est élevé moins la précision de la méthode est grande.

b. Δt très petit : on se rapproche de la solution avec une très bonne précision mais prend beaucoup trop de temps
Δt très grand : les calculs sont rapides mais on perd beaucoup en précision par rapport à la solution.

c. La tension aux bornes du condensateur devient égale à la f.é.m du générateur au bout d'environ 0,04 s.
Pour que la méthode d'Euler donne de bons résultats, il faut choisir un pas Δt qui soit très inférieur à cette durée. Ainsi la courbe sera construite avec un nombre de points assez important entre t = 0 s et t = 0,04 s.

2.6. La constante de temps τ est la durée au bout de laquelle le condensateur est chargé à 63 % de sa valeur finale.
$\mathbf{u_C(\tau)} = 0,63\times E = 0,63 \times 5,0 = \mathbf{3,15\ V}$ et on lit $\mathbf{0,010\ s < \tau < 0,011\ s}$



$\tau = R.C$ donc $C = \frac{\tau}{R}$ d'où $C = \frac{0,011}{2,2.10^3} = \mathbf{5,0.10^{-6}\ F = 5,0\ \mu F}$ ou $C = \frac{0,010}{2,2.10^3} = \mathbf{4,5\ \mu F}$

Dans la question 1.3. on avait établi que d'après le constructeur 4,2 μF < C < 5,2 μF
La valeur obtenue graphiquement reste dans cet intervalle.

2.7.a. Pour la charge : $\mathbf{\tau = R\cdot C = 0,01\ s}$ et pour la décharge $\mathbf{\tau' = R'\cdot C} = 10.10^3 \times 4,7.10^{-6} = \mathbf{0,047\ s}$
La durée de la décharge du condensateur est supérieure à celle de la charge. Proposition **VRAIE.**

b. Le condensateur se décharge dans la résistance R'. La résistance R n'est donc pas concernée.
τ' = R'·C donc proposition **FAUSSE**.

Exercice 3 **Voir livre p 126 - 127**