Mouvement relatif et mouvement absolu

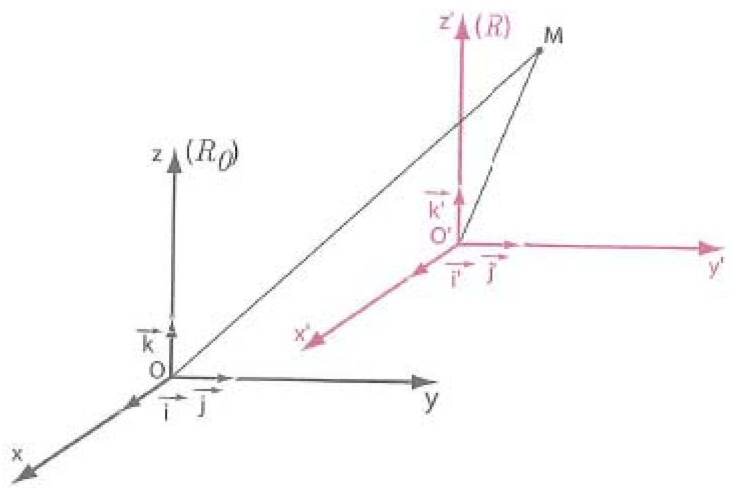

Figure 2.12

Soit un référentiel $(\mathcal{R}_0)$ considéré comme fixe et $(\mathcal{R})$ un référentiel mobile par rapport à $(\mathcal{R}_0)$ (Fig. 2.12).

Associons au référentiel $(\mathcal{R}_0)$ le repère d'espace $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et au référentiel $(\mathcal{R})$ le repère d'espace $(O', \vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'})$.
Si M est un point mobile dans $(\mathcal{R})$, on appellera :

- **mouvement relatif**, le mouvement de M par rapport à $(\mathcal{R})$,
- **mouvement absolu**, le mouvement de M par rapport à $(\mathcal{R}_0)$,
- **mouvement d'entraînement**, le mouvement de $(\mathcal{R})$ par rapport à $(\mathcal{R}_0)$.

Composition des vitesses

On a $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{OO'} + \underbrace{(x\,\vec{i'} + y\,\vec{j'} + z\,\vec{k'})}_{(\overrightarrow{O'M})}$,

Comme $\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dfrac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \dfrac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}$, alors

$$\underbrace{\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}}_{\vec{v}_a} = \underbrace{\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x\frac{d\vec{i'}}{dt} + y\frac{d\vec{j'}}{dt} + z\frac{d\vec{k'}}{dt}}_{\vec{v}_e} + \underbrace{\dot{x}\,\vec{i'} + \dot{y}\,\vec{j'} + \dot{z}\,\vec{k'}}_{\vec{v}_r}$$

soit

$$\underbrace{\boxed{\vec{v}_a}}_{\text{Vitesse absolue}} = \underbrace{\boxed{\vec{v}_e}}_{\text{Vitesse d'entraînement}} + \underbrace{\boxed{\vec{v}_r}}_{\text{Vitesse relative}}$$

Lorsque le mouvement d'entraînement est un mouvement de translation, les vecteurs $\vec{i'}$, $\vec{j'}$ et $\vec{k'}$ gardent des directions fixes de sorte que :

$$\frac{d\,\vec{i'}}{dt} = \frac{d\,\vec{j'}}{dt} = \frac{d\,\vec{k'}}{dt} = \vec{0}$$

et par suite

$$\begin{cases} \vec{v_a} = \dfrac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt} = \overrightarrow{v(M)}/(\mathcal{R}_0) \\ \vec{v_r} = \dfrac{d\,\overrightarrow{O'M}}{dt} = \overrightarrow{v(M)}/(\mathcal{R}) \quad \text{(si } (\mathcal{R}) \text{ est en translation par rapport à } (\mathcal{R}_0)\text{)} \\ \vec{v_e} = \dfrac{d\,\overrightarrow{OO'}}{dt} = \vec{v}(\mathcal{R})/(\mathcal{R}_0) \end{cases}$$

Composition des accélérations

Comme $\overrightarrow{a(M)} = \frac{d\,\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt}\right)$, alors en dérivant par rapport au temps l'expression $\frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\,\overrightarrow{OO'}}{dt} + x\frac{d\,\vec{i'}}{dt} + y\frac{d\,\vec{j'}}{dt} + z\frac{d\,\vec{k'}}{dt} + \dot{x}\,\vec{i'} + \dot{y}\,\vec{j'} + \dot{z}\,\vec{k'}$, on obtient :

$$\boxed{\vec{a_a}} = \boxed{\vec{a_r}} + \boxed{\vec{a_e}} + \boxed{\vec{a_c}}$$

Accélération absolue

Accélération relative

Accélération d'entraînement

Accélération de Coriolis

avec

$$\begin{cases} \vec{a_a} = \dfrac{d^2\,\overrightarrow{OM}}{dt^2} \\ \vec{a_e} = \dfrac{d^2\,\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x\dfrac{d^2\,\vec{i'}}{dt^2} + y\dfrac{d^2\,\vec{j'}}{dt^2} + z\dfrac{d^2\,\vec{k'}}{dt^2} \\ \vec{a_r} = \ddot{x}\,\vec{i'} + \ddot{y}\,\vec{j'} + \ddot{z}\,\vec{k'} \\ \vec{a_c} = 2\left(\dot{x}\dfrac{d\,\vec{i'}}{dt} + \dot{y}\dfrac{d\,\vec{j'}}{dt} + \dot{z}\dfrac{d\,\vec{k'}}{dt}\right) \end{cases}$$

où $\vec{a_c}$ représente l'accélération de Coriolis ou accélération complémentaire.

Si le mouvement d'entraînement est une translation sans rotation de ($\Re$) :

$$\overrightarrow{a(M)} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \frac{d^2\overrightarrow{O'M}}{dt^2}, \text{ soit } \vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r$$

Si ($\Re$) est en rotation par rapport à ($\Re_0$) , on définit un vecteur rotation $\vec{\Omega} = \Omega \cdot \vec{k}$ (Ω est la vitesse angulaire, constante)

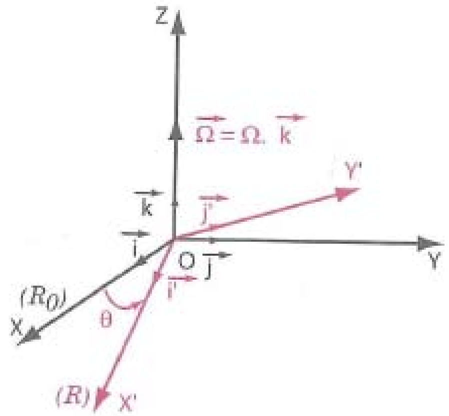

Figure 2.13

On montre que : $\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_c$

avec

$$\begin{cases} \vec{a}_a = \dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} \\ \vec{a}_r = \dfrac{d^2\overrightarrow{O'M}}{dt^2} \\ \vec{a}_c = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r \end{cases}$$

Exercice :

Un anneau de faibles dimensions, assimilable à un point matériel M de masse m, glisse sans frottement sur une tige rigide (D). La tige (D) tourne dans un plan horitontal (xOy) autour de l'axe vertical Oz avec la vitesse angulaire $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$, où θ représente l'angle orienté ($\vec{i}$, $\vec{u_r}$) et $\vec{u_r}$ un vecteur unitaire de (D) (Fig. 2.14).

Le mouvement du point matériel M sur la droite (D) est décrit par l'équation horaire :

$r = r_0(1 + \sin \omega t)$

où r_0 est une constante positive et $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r\vec{u_r}$.

On appelle mouvement relatif de M son mouvement sur la droite (D) et mouvement absolu son mouvement par rapport au repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$).

Déterminer, pour l'anneau, dans la base ($\vec{u_r}$, $\vec{u_\theta}$) :

1. La vitesse et l'accélération relatives,

2. La vitesse et l'accélération d'entraînement,

3. L'accélération de Coriolis.

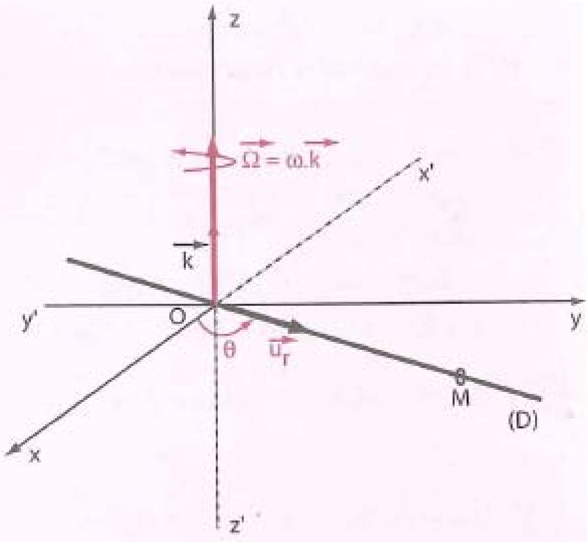

Figure 2.14

Corrigé

1. La vitesse relative $\overrightarrow{v_r}$ est donnée par :

$$\overrightarrow{v_r} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{\overrightarrow{u_r}=\overrightarrow{cste}} = \frac{dr}{dt}\overrightarrow{u_r} = r_0\omega\cos(\omega t).\overrightarrow{u_r}$$

L'accélération relative $\overrightarrow{a_r}$ est donc

$$\overrightarrow{a_r} = \left(\frac{d\overrightarrow{v_r}}{dt}\right)_{\overrightarrow{u_r}=\overrightarrow{cste}} = -r_0\omega^2\sin(\omega t).\overrightarrow{u_r}$$

2. La vitesse d'entraînement est telle que :

$$\overrightarrow{v_e} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{r=cste} = r\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} = r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} = r_0\omega(1+\sin\omega t).\overrightarrow{u_\theta}$$

et l'accélération d'entraînement :

$$\overrightarrow{a_e} = \left(\frac{d\overrightarrow{v_e}}{dt}\right)_{r=cste} = r\dot{\theta}\frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt} = -r\dot{\theta}^2\overrightarrow{u_r} = -r_0\omega^2(1+\sin\omega t).\overrightarrow{u_r}$$

3. L'accélération de Coriolis est :

$$\overrightarrow{a_C} = 2\overrightarrow{\Omega}\wedge\overrightarrow{v_r} = 2r_0\omega^2\cos(\omega t)\,\overrightarrow{k}\wedge\overrightarrow{u_r} = 2r_0\omega^2\cos(\omega t)\,\overrightarrow{u_\theta}$$