

التمرين 5 :

نعتبر المتتالية العددية $(U_n)_{n \geq 0}$ المعرفة ب:

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{2U_n - 1}{U_n} \end{cases}$$

(1) بين أن المتتالية (U_n) مصغورة بالعدد 1

(2) بين أن المتتالية (U_n) تناقصية.

(3) ليكن $a \in \mathbb{R}^*$ و $(V_n)_{n \geq 0}$ المتتالية المعرفة ب:

$$V_n = \frac{a}{U_n - 1}$$

أ - بين أن المتتالية (V_n) حسابية.

ب - احسب V_n بدلالة n و a .

التمرين 6 :

نعتبر المتتالية العددية $(U_n)_{n \geq 0}$ المعرفة ب:

$$\begin{cases} U_0 = -2 \\ U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n - 1 \end{cases} \text{ ونضع : } V_n = U_n + 3$$

(1) بين أن المتتالية (V_n) هندسية محددًا أساسها و حدها الأول.

(2) استنتج V_n و U_n بدلالة n .

(3) نضع : $S_n = \sum_{i=0}^n U_i$ حدد S_n بدلالة n .

التمرين 7 :

نعتبر المتتالية العددية $(U_n)_{n \geq 0}$ المعرفة ب:

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{2U_n + 3}{2U_n + 7} \end{cases} \text{ ونضع : } V_n = \frac{2U_n - 1}{2U_n + 6}$$

(1) أ- بين أن: $-3 < U_n < \frac{1}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

ب- ادرس رتبة $(U_n)_{n \geq 0}$

(2) أ- بين أن: $U_{n+1} - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{8} \left(U_n - \frac{1}{2} \right)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

ب- استنتج أن: $U_n - \frac{1}{2} \leq \left(\frac{-1}{2} \right) \left(\frac{1}{8} \right)^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(3) أ- بين أن المتتالية (V_n) هندسية محددًا أساسها و حدها الأول.

ب- احسب V_n و U_n بدلالة n .

(4) احسب: $S_n = \sum_{i=0}^n V_i$ بدلالة n .

(5) احسب : $P_n = \prod_{i=1}^n V_i = V_0 \times V_1 \times \dots \times V_n$ بدلالة n .

التمرين 1 : نعتبر المتتالية العددية $(U_n)_{n \geq 1}$ المعرفة ب:

$$\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 1 \end{cases}$$

(1) احسب U_2 و U_3 .

(2) بين أن: $U_n < 2$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

(3) بين أن $(U_n)_{n \geq 1}$ تزايدية ثم استنتج أنها محدودة.

التمرين 2 :

(1) لتكن $(U_n)_{n \geq 0}$ متتالية حسابية بحيث :

$$U_3 = 8 \text{ و } U_{10} = 29$$

حدد أساس هذه المتتالية ثم استنتج حدها الأول.

(2) لتكن $(V_n)_{n \geq 0}$ متتالية هندسية بحيث :

$$V_2 = \frac{1}{3} \text{ و } V_5 = \frac{1}{81}$$

حدد أساس هذه المتتالية ثم استنتج حدها الأول.

التمرين 3 : لتكن $(U_n)_{n \geq 0}$ و $(V_n)_{n \geq 0}$ المتتاليتين

$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = 5 - \frac{9}{U_n} \end{cases} \text{ و } V_n = \frac{1}{U_n - 2}$$

(1) احسب U_1 و V_0 و V_1 .

(2) بين أن $(V_n)_{n \geq 0}$ متتالية حسابية.

(3) احسب V_n بدلالة n ثم استنتج U_n بدلالة n .

(4) احسب المجموع $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$ بدلالة n .

التمرين 4 :

نعتبر المتتالية العددية $(U_n)_{n \geq 1}$ المعرفة ب:

$$\begin{cases} U_1 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + 2 \end{cases}$$

(1) احسب U_2 و U_3 .

(2) بين أن: $U_n < 3$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

(3) بين أن $(U_n)_{n \geq 1}$ تزايدية ثم استنتج أنها محدودة.

(4) نعتبر المتتالية العددية $(V_n)_{n \geq 1}$ المعرفة ب:

$$V_n = U_n - 3$$

أ - بين أن $(V_n)_{n \geq 1}$ متتالية هندسية محددًا أساسها و حدها الأول.

ب - احسب V_n بدلالة n ثم استنتج U_n بدلالة n .

ج - احسب المجاميع التالية بدلالة n :

$$S_n = \sum_{i=1}^n U_i \text{ و } T_n = \sum_{i=1}^n V_i$$

التمرين 8: نعتبر المتتالية العددية $(U_n)_{n \geq 0}$ المعرفة ب:

$$\begin{cases} U_0 = 4 \\ U_{n+1} = \frac{2U_n^2 - 3}{U_n + 2} \end{cases}$$

(1) بين أن: $\forall n \in \mathbb{N} : U_n > 3$

(2) ادرس رتبة $(U_n)_{n \geq 0}$

(3) بين أن: $\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} - 3 > \frac{3}{2}(U_n - 3)$

(4) استنتج أن: $\forall n \in \mathbb{N} : U_n > \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$

التمرين 9: نعتبر المتتالية العددية $(U_n)_{n \geq 0}$ المعرفة ب:

$$\begin{cases} U_0 = -1 \text{ و } U_1 = 1 \\ U_{n+2} = U_{n+1} - \frac{1}{4}U_n \end{cases}$$

(1) احسب U_2 و U_3 .

(2) لتكن $(a_n)_{n \geq 0}$ و $(b_n)_{n \geq 0}$ المتتاليتين المعرفتين ب:

$$a_n = U_{n+1} - \frac{1}{2}U_n \text{ و } b_n = 2^n U_n$$

أ - بين أن $(a_n)_{n \geq 0}$ متتالية هندسية محددًا أساسها و حدها الأول ثم احسب a_n بدلالة n .

ب - بين أن $(b_n)_{n \geq 0}$ متتالية حسابية محددًا أساسها و حدها الأول ثم احسب b_n بدلالة n .

ج - استنتج U_n بدلالة n .

التمرين 10: نعتبر المتتالية العددية $(U_n)_{n \geq 1}$ المعرفة ب:

$$\begin{cases} U_1 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{5U_n + 3}{U_n + 3} \end{cases}$$

(1) احسب U_2 و U_3 .

(2) بين أن: $\forall n \in \mathbb{N}^* : 0 \leq U_n \leq 3$

(3) ادرس رتبة المتتالية $(U_n)_{n \geq 1}$.

(4) نعتبر المتتالية العددية $(V_n)_{n \geq 1}$ المعرفة ب:

$$V_n = \frac{U_n - 3}{U_n + 1}$$

أ - بين أن $(V_n)_{n \geq 1}$ متتالية هندسية محددًا أساسها و حدها الأول.

ب - احسب V_n بدلالة n .

ج - احسب المجموع التالي بدلالة n :

$$S_n = \sum_{i=1}^n V_i$$

التمرين 11: نعتبر المتتالية العددية $(U_n)_{n \geq 0}$ المعرفة ب:

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{U_n^3 + 2}{U_n^2 + 1} \end{cases}$$

(1) أ - بين أن: $\forall n \in \mathbb{N} : 0 < U_n < 2$

ب - ادرس رتبة المتتالية $(U_n)_{n \geq 0}$.

(2) أ - بين أن: $\forall n \in \mathbb{N} : 2 - U_{n+1} < \frac{4}{5}(2 - U_n)$

ب - استنتج أن: $\forall n \in \mathbb{N} : U_n > 2 - \left(\frac{4}{5}\right)^n$

ج - نضع: $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$

بين أن: $\forall n \in \mathbb{N} : S_n > 2n - 3 + 5\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$